ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN
GRAZ

14. BAND 1. HEFT

MIT 43 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM APRIL 1961)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Acta Phys. Austr.

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca", Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen".

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

14. Band/1. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Hanke, Ingrid. Störstellen in Kalzitkristallen. I. Nachweis von ätzempfindlichen Störstellen und ihre Verteilung auf unbearbeiteten Rhomboederspaltflächen 1

Krzywoblocki, M. Z. v. On the General Form of the Special Theory of Relativity. II. 22

Bauer, J. und **E. Pfleger.** Über ein hydrodynamisches Analogon zum Skineffekt im elliptischen Zylinder 29

Krzywoblocki, M. Z. v. On the General Form of the Special Theory of Relativity. III. On the Super-Light Motion in the General Form of the Special Theory of Relativity 39

Ranninger, J. Über die direkte Beobachtung der Lorentz-Kontraktion . 50

Birgfellner, H. und **H. Müller.** Zur Temperaturabhängigkeit der Exoelektronenemission 56

Pietschmann, H. Zur Renormierung der zweikomponentigen Quantenelektrodynamik 63

Gross, F. Besonderheiten bei der Leitung von Ag^+-Ionen in kristallinem Quarz 75

Buchbesprechungen 86

11270

Störstellen in Kalzitkristallen*

I. Teil:

Nachweis von ätzempfindlichen Störstellen und ihre Verteilung auf unbearbeiteten Rhomboederspaltflächen

Von

Ingrid Hanke

Physikalisches Institut der Universität Graz

Mit 19 Abbildungen

(*Eingegangen am 26. Januar 1960*)

Zusammenfassung

Mit Hilfe der Ätzmethode wird die Verteilung und Flächendichte der Fehlstellen auf unbearbeiteten Kalzit-Rhomboederspaltflächen ermittelt. Es werden drei verschiedene Ätzgrubentypen nachgewiesen, die sich offenbar auf Fehlstellen mit unterschiedlichem Wirkungsbereich zurückführen lassen. Die Anordnung der Ätzgruben auf der Spaltfläche wird durch drei Merkmale gekennzeichnet. Geringe Gitterstörungen treten auf allen Spaltflächen in einer Dichte von $10^6/cm^2$ auf, während die Dichte gröberer Störungen zwischen $10^2/cm^2$ und $10^4/cm^2$ schwankt. Die Abhängigkeit der Feinstruktur der Ätzgrubenwände von der Konzentration der Essigsäurelösung wird in einem Konzentrationsbereich von 0,1% bis 0,02% (Gewichtsprozent) untersucht. Es wird gezeigt, daß die Materialablösung innerhalb von Ätzgruben als Funktion der Ätzzeit und der Konzentration durch Näherungsgesetze erfaßt werden kann. Aus der Stufenbildung innerhalb von Ätzgruben wird auf einen geschichteten Aufbau der Kristalle geschlossen und die Abmessungen idealer Gitterbereiche werden aus interferometrischen Messungen abgeschätzt.

Einleitung

Seit mehreren Jahrzehnten weiß man, daß Kristalle nicht den aus den Röntgenfeinststrukturen berechenbaren idealen Gitterbau besitzen, sondern daß im allgemeinen ein von diesem verschiedener chemischer oder mechanischer Realbau vorliegt [1]. Dieser äußert sich in einer Mosaikstruktur, über deren Zustandekommen die Meinungen geteilt sind [2]. Bei der Untersuchung des Realbaues hat sich bisher die Ätzmethode am besten bewährt, weil sie fast alle Gitterstörungen zu erfassen erlaubt, da nach der Theorie von KOSSEL und STRANSKY

* Teile dieser Arbeit sind einer Dissertation (I. HANKE, geb. SCHÖSSER, Diss. Univ. Graz, 1959) entnommen.

Kristallbereiche mit gestörten Gitterstellen schneller abgelöst werden als ungestörte Bereiche. Der Angriff der Ätzflüssigkeit setzt vorwiegend an den Gitterstellen ein, an denen die Bausteine mit geringerer Energie als in idealen Bereichen gebunden sind, z. B. an Ecken, Kanten und vor allem an Kristallbaufehlern verschiedener Natur.

Für Kalkspat ist aus röntgenographischen Untersuchungen bekannt, daß er zwar annähernd einen Idealkristallbau aufweist, aber es wurden auch Abweichungen nicht nur für Kristalle von verschiedenen Fundorten, sondern auch für einzelne Bereiche desselben Kristalls gefunden [3]. An Kalkspat wurden Ätzversuche vorwiegend zur Klärung von Fragen, die mit der Kristallsymmetrie in Zusammenhang stehen, ausgeführt. Wesentliche Aufschlüsse über die Realbaustrukturen wurden durch elektronenmikroskopische Untersuchungen von Pfefferkorn gewonnen [4]. In der vorliegenden Arbeit sollen die Verteilung der Fehlstellen, ihr Wirkungsbereich und die Gesetzmäßigkeiten des Abbaues innerhalb gestörter Bereiche eingehend behandelt werden. Rückschlüsse auf die spezielle Art der Fehlstellen werden aus dem Ätzverhalten nicht gezogen.

Ätzverfahren und optische Beobachtungsmethoden

Es ist bereits bekannt, daß die Form und Symmetrie der durch den bevorzugten Angriff eines Lösungsmittels an Gitterstörstellen hervorgerufenen Ätzfiguren von der Art der Ätzflüssigkeit und deren Konzentration abhängt. Erfolgt der Abbau mit optisch inaktiven Ätzmitteln, so entstehen symmetrische Gruben, während bei Verwendung optisch aktiver Lösungsmittel asymmetrische Gruben ausgebildet werden, wie zuerst von Hettich und später von vielen anderen gezeigt wurde [5]. Nach Friedel und Kleber [6] wird die Symmetrie der Ätzfiguren durch die der Lösungsmittelmoleküle und des Kristalls bestimmt. Eine umfassende Gesetzmäßigkeit für die Formabhängigkeit der Ätzgruben vom Lösungsmittel ist zur Zeit noch nicht bekannt.

Es wurde als optisch inaktive Ätzflüssigkeit Essigsäure gewählt. Sie wurde mit destilliertem Wasser auf 0,1% bis 0,02% verdünnt. Der Dissoziationsgrad beträgt für die angegebenen Konzentrationen 0,025 bzw. 0,04. Entgegen der Annahme von Pfefferkorn [4] zeigt sich, daß die feinen Realbaustrukturen erst bei sehr geringen Konzentrationen erschlossen werden können, während bei hohen Konzentrationen eine sekundäre Ätzgrubenbildung einsetzt, wie später gezeigt wird.

Die Ätzversuche wurden an sehr guten, vollkommen durchsichtigen Kalkspatkristallen ausgeführt, die von verschiedenen Fundorten stammten.[1] Für Versuchszwecke wurden ausnahmslos Rhomboederspaltflächen verwendet, da man sie jederzeit mit der Hand unter Ausnützung der Kerbwirkung einer Schneide von der Kante des Kristalls aus abspalten kann. Voraussetzung für das Gelingen der Ätzversuche

[1] Die Kristalle wurden uns von Herrn Dr. Weissenberg (Firma Ernst Leitz, G.m.b.H.) freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

ist, daß die Probenoberflächen vollkommen frisch sind, da sonst sekundäre Einflüsse auftreten können, die den Abbau wesentlich beeinträchtigen [7]. Die Spaltstücke, die eine Kantenlänge von 3 bis 5 mm besaßen, wurden mit Araldit auf gläserne Objektträger gekittet. Die Einwirkung des Lösungsmittels wurde dadurch erzielt, daß die Kalkspatproben im Lösungsmittel rasch hin und her bewegt wurden. Damit sollte gleichzeitig erreicht werden, daß die Reaktionsprodukte rasch beseitigt werden und den Angriff des Ätzmittels durch eine Diffusionsverminderung in der Phasengrenze nicht verhindern. Um die Wasserstoffionenkonzentration innerhalb bestimmter Grenzen konstant zu halten, wurde der Einfluß des Ätzmittels jeweils nach 10 Sekunden unterbrochen und das Lösungsmittel erneuert. Außerdem wurde nach je 10 Sekunden Ätzangriff die Probe in destilliertem Wasser gründlich gespült, um eine Beeinflussung der Materialabtragung durch Diffusionsvorgänge, die sich vor allem in schmalen Spalten und tiefen Gruben bemerkbar machen und zu einem unregelmäßigen Abbau führen können, zu vermeiden. Zum Beispiel kann die Ausrundung steiler Ätzpyramiden bei langer Ätzdauer in einer unzulänglichen Entfernung der Reaktionsprodukte während des Angriffs ihre Ursache haben [8].

Die Gesamtätzdauer frischer, unbearbeiteter Spaltflächen wurde von 10 bis 60 sek in Stufen von 10 Sekunden erhöht. Wurde länger als 60 Sekunden geätzt, so wurde die Ätzzeit in Stufen von 60 Sekunden gesteigert, weil dann nur mehr quantitative und keine wesentlichen qualitativen Unterschiede zu registrieren sind. Die Versuche wurden bei einer Temperatur von $20° \pm 2°$ ausgeführt.

Für die Untersuchung der bei Abbauvorgängen auftretenden Oberflächenveränderungen, die im ersten Stadium an der Grenze des lichtoptischen Auflösungsvermögens liegen, sind besonders empfindliche Nachweisverfahren, wie Phasenkontrast, Schräglicht und Interferenz erforderlich. Für vorwiegend qualitative Beobachtung stand das Reichert Mikroskop „Melabor", ein Auflichtmikroskop, in Verwendung, das mit einer Phasenkontrasteinrichtung ausgerüstet ist. Es wurde fast ausschließlich im negativen Phasenkontrast gearbeitet, um die Gefahr einer Inversion zu vermeiden [9]. Zur Ausmessung von Ätzfiguren, Stufenabständen usw. wurde das Zweistrahl-Interferenzmikroskop „Zeiss-Opton" verwendet, das die Herstellung von Weißlicht- und Thalliumlichtinterferenzen gestattet. Ein besonders hohes Tiefenauflösungsvermögen läßt sich bei Streifenstellung „unendlich" erreichen. Es werden dabei Objekt und Vergleichsspiegel parallel gestellt, so daß die gesamte Fläche mit Ausnahme der Vertiefungen gleichmäßig hell erscheint. Zur genaueren Auswertung der Interferogramme wurde gelegentlich vom Äquidensitenverfahren Gebrauch gemacht [10].

Ätzgrubenbildung

Beim kurzen Einwirken von Essigsäurelösungen geringer Konzentration auf Kalzit-Rhomboederspaltflächen lassen sich zwei geome-

trische Typen von Ätzfiguren mit rhombischer Basis erkennen, und zwar solche, die die Form von Pyramiden und solche, die die Gestalt von

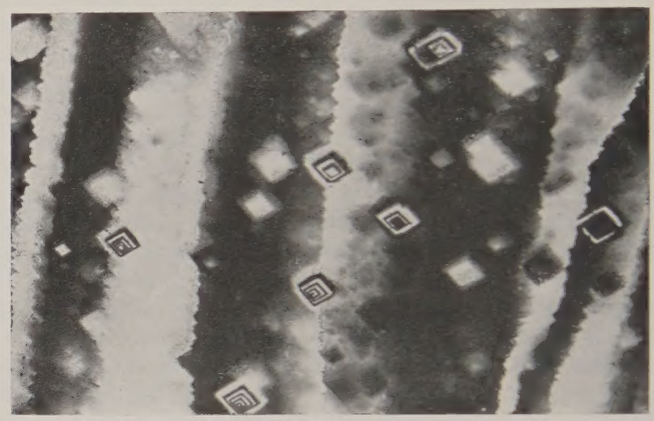

Abb. 1. Ätzpyramiden und -stümpfe auf gewöhnlichem Kalzit, 40 sek in 0,02%-iger CH_3COOH geätzt, Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 900 : 1

Pyramidenstümpfen besitzen. Letztere können entweder extrem seicht oder ungefähr gleich tief wie die Ätzpyramiden ausgebildet sein (Abb. 1).

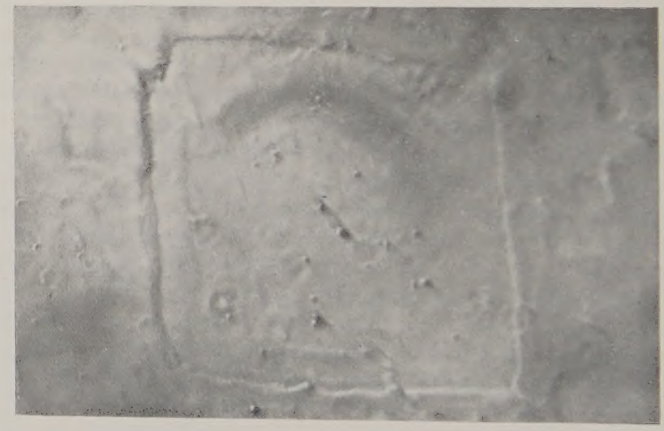

Abb. 2. Große seichte Ätzgrube, zirka 1000 Å tief. 240 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1500 : 1

Die extrem seichten Ätzgruben mit Boden weisen innerhalb der interferometrischen Meßgenauigkeit eine Tiefe von 500 Å bis 1000 Å auf, unabhängig von Ätzdauer und Konzentration des Lösungsmittels. Sie

vergrößern mit zunehmender Ätzdauer lediglich ihren Oberflächenbedarf (Abb. 2, große seichte Ätzgrube). Es muß sich demnach in dieser Tiefe unter dem Spaltflächenniveau eine chemisch resistente Schichte befinden.

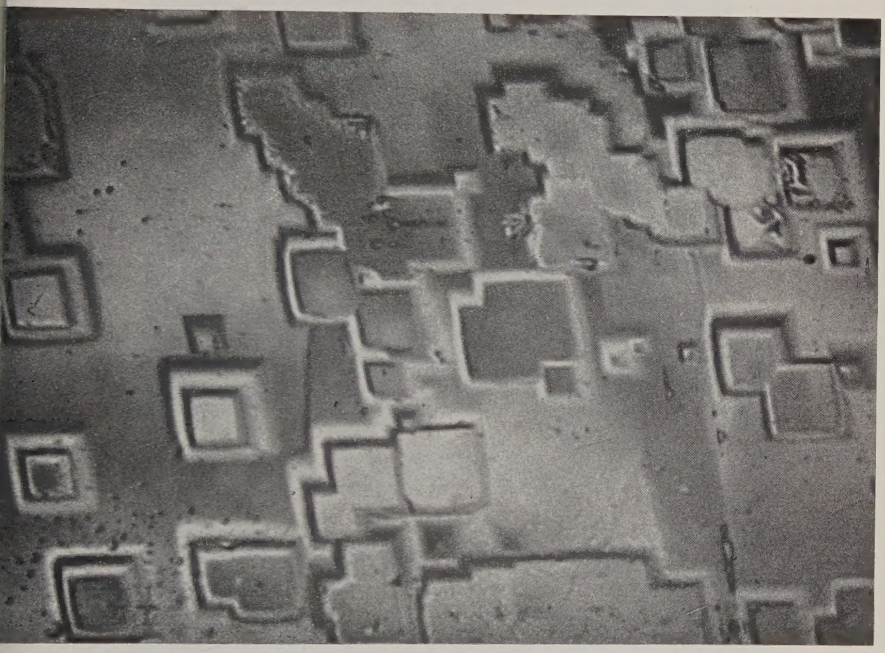

Abb. 3. Ätzgruben mit Boden, auf gewöhnlichem Kalzit, die sich teilweise überschneiden. Interferogramm, $\lambda = 546\ m\mu$, Vergr. 1100 : 1

Die Häufigkeit der Ätzfiguren ist auf Flächen verschiedener Kristalle bzw. auch auf Flächen ein und desselben Kristalls und sogar innerhalb einer Spaltfläche erheblichen Schwankungen unterworfen. Die Zahl der Ätzgruben wird aber immer durch den ersten Ätzangriff bestimmt. Eine Zunahme der Ätzdauer führt nur zu einer Änderung ihrer Form und Größe, das heißt die meisten Ätzpyramiden gehen einerseits in Pyramidenstümpfe über und vergrößern andererseits ihren Oberflächenbedarf und wachsen dabei ineinander (Abb. 3 und 4).

Beide erwähnten Ätzgrubentypen weisen rhombische Basisflächen auf, die der Rhomboederfläche ähnlich und mit ihr gleichsinnig orientiert sind. Für idealsymmetrische Ätzgruben existiert, wie in Abb. 5 dargestellt, nur eine Symmetrierichtung, nämlich die der kürzeren Rhombendiagonale. Im allgemeinsten Fall fehlt dieses Symmetrieelement (vgl. Abb. 5 *a*, *b* und *c* und Abb. 6) trotz Verwendung optisch inaktiver Lösungsmittel.

Zur Erklärung für das Fehlen der für die betreffende Kristallklasse zu erwartenden Symmetrie müssen verschiedene Faktoren herangezogen werden. PFEFFERKORN zeigt, daß sich asymmetrische Ätzgruben

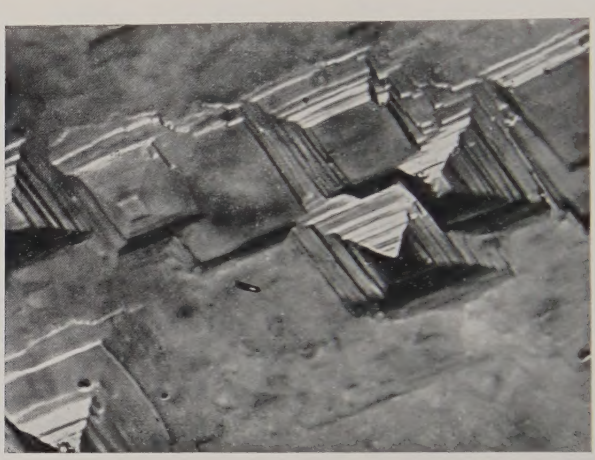

Abb. 4. Ätzpyramiden und -stümpfe, die sich bei langer Ätzzeit teilweise überlappen. 120 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1000 : 1

aus verschiedenen kristallographisch orientierten Elementen kombinieren lassen. Nach neueren Untersuchungen an Natriumchlorid und Lithiumfluorid soll man aus den Symmetrieeigenschaften der Ätzgruben die Orientierung der Fehlbaubereiche relativ zur Spaltfläche ermitteln können [11]. Die Symmetrie bzw. Asymmetrie soll sich durch einen unterschiedlichen Abbauvorgang an „edge- und screw-dislocations“[2] erklären lassen [7]. Ob in Kalzit die Unterscheidung dieser beiden Fehlbaumöglichkeiten, vor allem wegen des Fehlens von Wachstumsspiralen, berechtigt ist, kann durch vorliegende Arbeit nicht entschieden werden.

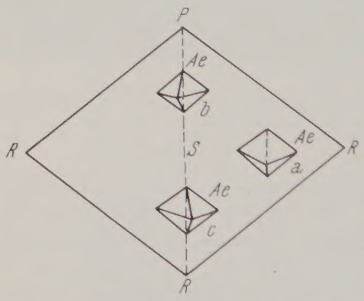

Abb. 5. Projektion der Ätzgruben in die Spaltfläche. *a* ideale Pyramide, *b* und *c* asymmetrische Pyramiden, *P* Polecke, *R* Randecke, *S* Symmetrierichtung

Die Entstehung der flachen Ätzgruben mit Boden läßt sich auf Grund einfacher Überlegung erklären: Zu Beginn des Ätzangriffs erfolgt der chemische Abbau vom Ort der Störstelle in tangentialer und senkrechter Richtung zur Spaltfläche mit Geschwindigkeiten, die durch

[2] Bezüglich „edge- und screw dislocations“ vergl. KITTEL, C., Introduction To Solid State Physics. 2. Aufl. 561. New York, 1956.

die Anisotropie des Gitters und seine Störung bedingt werden, bis in der Richtung senkrecht zur Spaltfläche ein chemisch widerstandsfähiges, also störstellenfreies Gittergebiet freigelegt wird, das einen so hohen Lösungswiderstand besitzt, daß die Lösungsgeschwindigkeit gegen Null geht. Sie besitzt zwar dann einen endlichen, wenn auch sehr kleinen Wert, der für die Ablösung idealer Gitterschichten normal zur Spaltfläche bei der gegebenen Konzentration des Lösungsmittels charakteristisch ist. In tangentialer Richtung setzt sich der Abbau in beobachtbarem Ausmaße fort, entweder bis er durch Beseitigung der Lösungsionen im Spülprozeß unterbrochen wird, oder bis er durch eine widerstandsfähige Schichte benachbarter Rhomboederelemente gehemmt wird. In analoger Weise dürfte auch die Bildung der Ätzpyramiden erfolgen, allerdings mit der Ausnahme, daß bei kurzen Ätzzeiten der Tiefenzunahme kein Einhalt geboten wird, weil die Gitterstörungen bis in tiefere Schichten reichen.

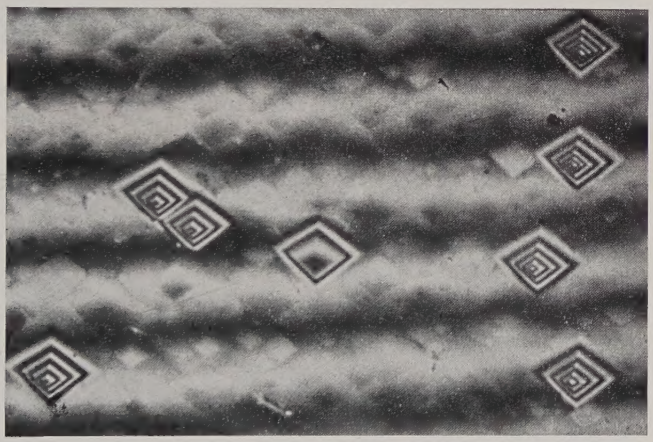

Abb. 6. Asymmetrische Ätzgruben. 40 sek in 0,1%-iger Essigsäure geätzt. Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 1100 : 1

Wie schon eingangs erwähnt, ist die Ätzgrubenform weitgehend von der Konzentration des Lösungsmittels abhängig. Selbst bei Variation der Essigsäurekonzentration zwischen 0,1% und 0,02% treten erhebliche Unterschiede in der Feinstruktur der Ätzgrubenwände auf. Während bei Konzentrationen über 0,05% die Ätzgrubenwände relativ glatt sind (Abb. 7), setzt bei Konzentrationen unter 0,05% eine deutliche Stufenbildung ein (Abb. 4 und 8). Die Treppenstruktur macht sich allerdings erst dann bemerkbar, wenn die bei der gegebenen Ätzzeit bewirkte Ätzgrubentiefe größer als eine Stufenhöhe ist.

Die Ursache für die Verschiedenheit des Abbaues bei Änderung der Konzentration läßt sich darauf zurückführen, daß bei starker Ver-

dünnung des Lösungsmittels der Dissoziationsgrad zwar höher, der Gesamtionengehalt aber kleiner ist. Der chemische Abbau erfolgt daher

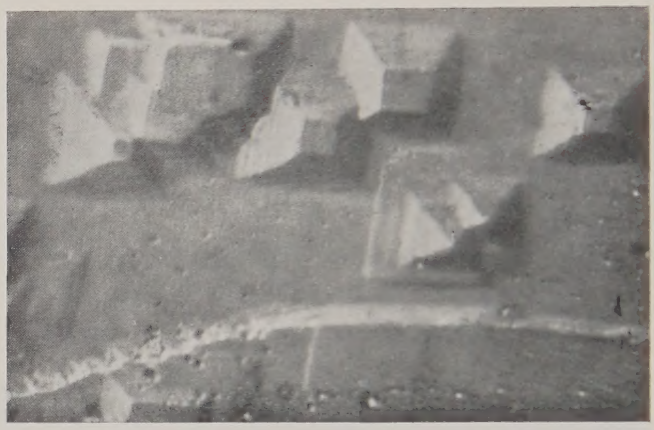

Abb. 7. Ätzgruben mit glatten Wänden auf gewöhnlichem Kalzit. 30 sek in 0,1%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung. Vergr. 1000 : 1

Abb. 8. Ätzgruben mit gestuften Wänden. 30 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1500 : 1

langsamer als bei hohen Konzentrationen und die Lösungsgeschwindigkeit nimmt an resistenten Schichten erheblich ab, so daß ideale Gitterbereiche innerhalb der Ätzgruben nicht abgetragen werden. Bei hohen Konzentrationen erfolgt die Materialabtragung wesentlich schneller, so daß auch widerstandsfähige Gitterbereiche von den Kanten aus rasch abgelöst werden, weshalb relativ glatte Grubenwände entstehen.

Form der Ätzgruben und Wirkungsbereich der Störstellen

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Ausbildung einer Treppenstruktur an den Ätzgrubenwänden an eine sehr langsame Abtragung gebunden ist. Die interferometrische Untersuchung der Ätzgruben, die bei einer Essigsäurekonzentration von 0,02% entstehen, liefert die in Abb. 9 *b* schematisch dargestellte Form. Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch eine symmetrische Ätzgrube, der parallel zu einer Basiskante ausgeführt wurde (Abb. 9 *a*). Der Abbildung ist unmittelbar zu entnehmen, daß sich die Ätzgruben aus einer diskreten Folge von Pyramidenstümpfen mit rhombischen Basisflächen zusammensetzen, wobei die Höhen der einzelnen Stümpfe dem Abstand zweier

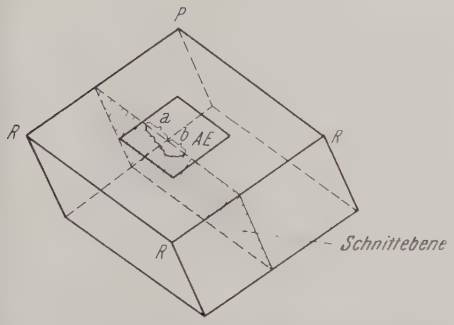

Abb. 9 *a*. Schematische Darstellung der Schnittebene durch eine symmetrische Ätzpyramide

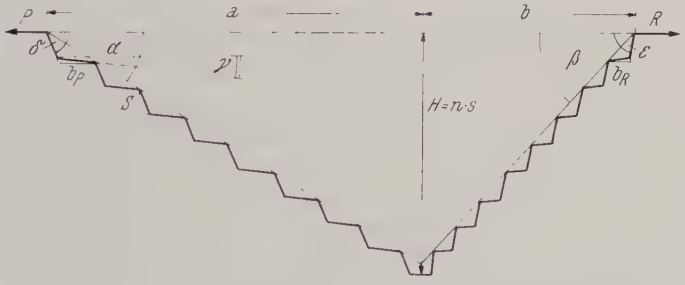

Abb. 9 *b*. Schnitt durch eine symmetrische Ätzgrube parallel zu einer Ätzgrubenbasiskante, wobei die Schnittebene durch die Pyramidenspitze geht. Dabei bedeuten:
α mittlere Neigung der Ätzgrubenwände gegen die Spaltfläche auf der Polseite, β mittlere Neigung auf der Randseite, a Abstand der Ätzgrubenbasiskante von der Pyramidenspitze auf der Polseite, b Abstand auf der Randseite, H Ätzgrubentiefe $= n \cdot s$, n eine ganze Zahl, s Höhe einer Stufe = Schichtabstand, b_p Stufenbreite auf der Polseite, b_r Stufenbreite auf der Randseite, δ, ε Neigung der Stufenabsätze gegen die Spaltfläche, γ Neigung der Stufenflächen gegen die Spaltfläche

benachbarter störstellenfreier Gitterschichten entsprechen. Die Neigungswinkel der Stufenabsätze δ und ε lassen sich interferometrisch nicht ermitteln. Aus kristallographischen Gründen wäre zu erwarten, daß sie 74°55′ bzw. 104°05′ betragen, weil diese Form der Ätzgruben der Kristallklasse entsprechen würde, obwohl die Ätzgrube um 180° gegen das Kalzitgitter gedreht liegen würde. Eine ähnliche Orientierung weisen aber auch die Ätzfiguren an Diamantoktaederflächen auf [8].

Die übrigen angegebenen Bestimmungsstücke α, β, H, b_p, b_r, s, a, b lassen sich durch Ausmessung von Interferenz- und Auflichtaufnahmen ermitteln. Die Abweichungen von den Mittelwerten bewegen sich im Durchschnitt zwischen 10% und 30%. H, a und b vergrößern sich bei kurzen Gesamtätzzeiten proportional zueinander, so daß die Ätzgrubenform erhalten bleibt. Innerhalb kurzer Ätzabschnitte ($\leq$ 180 sek) sind α, β, b_p und b_r konstant. Bei langen Ätzzeiten nehmen b_p und b_r vor allem in oberflächennahen Gebieten zu, während α und β auf zirka ein Drittel ihres ursprünglichen Wertes absinken. Einige Mittelwerte aus 20 bis 30 Einzelmessungen sind in Tab. 1 angegeben.

Tabelle 1. Stufenbreiten und Neigungswinkel der Pyramidenflächen gegen die Spaltfläche in Abhängigkeit von der Ätzzeit
Konzentration der Essigsäure: 0,02%

Ätzdauer (sek)	Stufenbreite b_p (μ)	Stufenbreite b_r (μ)	α	β
20	1,3	0,75	7°35′	11°15′
40	1,4	0,8	7°16′	12°30′
60	1,6	1,0	7°15′	11°56′
80	1,5	0,9	7°00′	10°55′
100	1,7	0,95	6°54′	11°20′
120	1,7	1,0	7°10′	12°08′
180	1,6	1,1	7°04′	11°35′
240	1,7	1,1	6°30′	10°00′
600	2,3	1,35	2°50′	3°45′
1200	2,5	1,5	2°10′	3°10′

Diese Änderung der Ätzgrubenform bei längerer Ätzung läßt sich darauf zurückführen, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das gesamte gestörte Gittergebiet abgetragen ist, mit steigender Ätzdauer zunimmt. Der Abbau erfolgt daher nur mehr mit bevorzugter Intensität in tangentialer Richtung, so daß vor allem in oberflächennahen Gebieten eine Stufenverbreiterung einsetzt, die eine Abnahme der mittleren Neigungswinkel mit sich führt. Die gröbsten Gitterstörungen scheinen demnach maximal bis in Tiefen von 20 000 Å bis 30 000 Å unter das Spaltflächenniveau zu reichen. Die Angabe der seitlichen Ausdehnung der Störstellen wird insoferne erschwert, als die Ablösung tangential zur Spaltfläche auch durch andere Faktoren wesentlich mitbestimmt wird, die sich, wie weiter unten dargelegt wird, nicht isolieren lassen.

Zur Stufenbildung innerhalb von Ätzgruben

Die Höhen s der Stufenabsätze lassen sich mit Hilfe von Zweistrahl-Interferenzen ermitteln, wenn man die Streifen normal zu den Basiskanten der Ätzgruben einstellt (Abb. 10). Wie der nachstehenden Tab. 2 zu entnehmen ist, sind die Stufenhöhen innerhalb der Schwankungsgrenzen von der Ätzdauer unabhängig und liegen um einen Mittelwert von 800 $\pm$ 200 Å statistisch verteilt.

Die angegebenen Meßwerte zeigen eine gute Übereinstimmung mit elektronenmikroskopisch ermittelten Schichtdicken [4]. Geringfügige

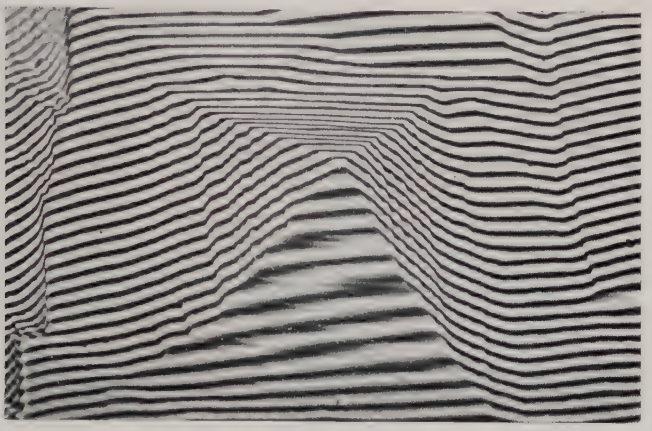

Abb. 10. Interferenzlinien normal zu einer Ätzgrubenbasiskante eingestellt, zwecks Ausmessung der Stufenhöhen. Fläche wurde 600 sek in 0,02%-iger Essigsäurelösung geätzt. Vergr. 800 : 1

Tabelle 2. Interferometrisch ermittelte Schichtabstände bei einer Konzentration von 0,02%, für verschiedene Spaltflächen von Kristallen eines Fundortes in Abhängigkeit von der Ätzdauer

Ätzdauer (sek)	Mittelwert (Å)	Streuung (Å)
40	780	450 bis 900
60	820	400 bis 1000
80	850	500 bis 1100
100	900	450 bis 1200
120	750	410 bis 1100
180	750	550 bis 900
240	780	500 bis 1000
300	880	540 bis 1200
600	850	500 bis 1100
1200	900	600 bis 1200

Unterschiede treten lediglich an Kristallen von verschiedenen Fundorten auf. Die Stufenhöhen lassen sich mit dem Abstand störstellenfreier Gitterschichten identifizieren und sind daher eine für den Realkristall charakteristische Eigenschaft. Die Größe der Idealgitterblöcke wird durch die Zahl der in den drei Raumrichtungen aufeinanderfolgenden störstellenfreien Netzebenen bestimmt. Aus der Stufenbildung allein läßt sich über die Größe der Idealgitterblöcke keine definierte Aussage treffen, weil die Stufenhöhen lediglich den Abstand resistenter Schichten markieren. Man kann aber die Abmessungen der Idealbereiche

zu 500 Å bis 1000 Å Kantenlänge abschätzen, wenn man in Betracht zieht, daß die Stufenbildung parallel zu den drei Rhomboederspaltflächen eintritt, in Übereinstimmung mit der Mosaikstruktur (Abb. 11).

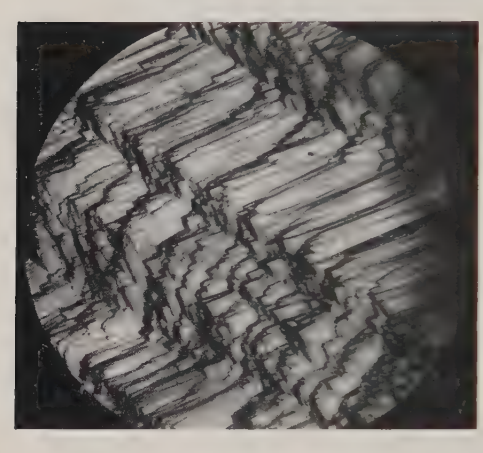

Abb. 11. Abbau an Spaltstufen. Nach 600 sek Ätzdauer in 0,02%-iger Essigsäure tritt eine Blockstruktur in Erscheinung. Schrägbeleuchtung. Vergr. 300 : 1

Die Ursache für die Schichtbildung läßt sich, wie aus den bisher gewonnenen Ergebnissen bekannt ist, auf das Wachstum zurückführen. Die bekannte Selbstreinigung beim Kristallwachstum wirkt sich in der Richtung aus, daß der Einbau von Fremdteilchen, die in jeder Lösung oder Schmelze als Verunreinigungen enthalten sind, solange zurückgestellt wird, bis sich an der Oberfläche genügend Fremdteilchen angesammelt haben [12]. Dann werden diese Fremdbausteine nach den Gesetzen für die Bildung neuer Phasen aus übersättigten Lösungen eingebaut. Dieser Vorgang wiederholt sich quasiperiodisch, wobei die Perioden durch den Gehalt an Fremdbausteinen bestimmt werden, das heißt die gestörten Schichten rücken umso näher aneinander, je mehr Fremdbausteine bei der Kristallisation vorhanden sind. Lockerstellen sollen in die Nachbarschaft der schon vorhandenen Fremdbausteine thermisch diffundieren und mit diesen in ein stabiles Gleichgewicht treten [12]. Da Fremdbausteine, die nicht als Mischkristallkomponente in das Gitter eingebaut werden, parallel zu den Ebenen geringster Wachstumsgeschwindigkeit abgeschieden werden, ist es verständlich, daß bei Kalzit die Rhomboederflächen als Begrenzung der Realbaublöcke in Erscheinung treten.

Anordnung und Dichte der Störstellen

Die Entstehung der drei verschiedenen Ätzgrubensorten läßt sich auf die Existenz verschiedener Störstellentypen zurückführen, die eine unterschiedliche Wirkungssphäre aufweisen. Doch kann man mit der Ätzmethode über den Charakter der Störstellen, das heißt ob es sich um Fremdatome oder Baufehler handelt, keine definierte Aussage treffen. Es ist jedoch sehr unwahrscheinlich, daß es sich bei den hier nachgewiesenen Fehlstellen um einatomige Störungen handelt, sondern es ist eher zu erwarten, daß eine Ansammlung von atomaren Baufehlern oder Fremdatomen verschiedener Natur vorliegt. Es läßt sich bei Ver-

wendung von Essigsäurelösungen mit den angegebenen Konzentrationen nicht entscheiden, ob die Fehlstellen nur vom Wachstum her-

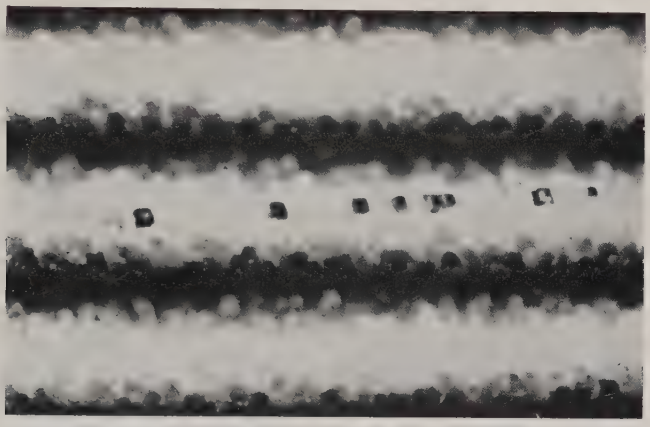

Abb. 12. Seichte Ätzgruben auf gewöhnlichem Kalzit in extrem dichter Packung. 10 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Interferogramm, $\lambda = 546\ m\mu$, Vergr. 1100 : 1

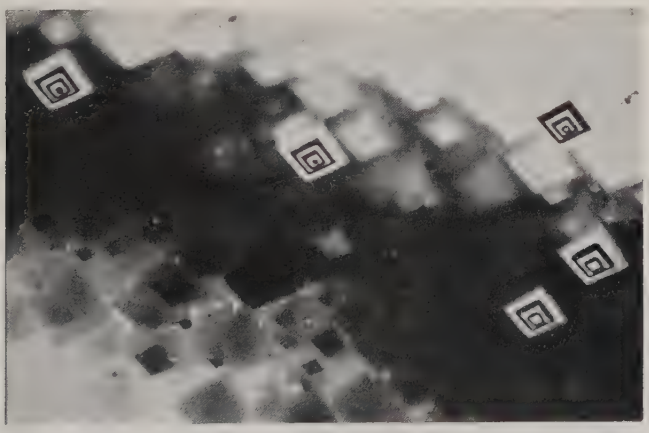

Abb. 13. Tiefe Ätzgruben in größeren Abständen willkürlich verteilt. 60 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt, Interferogramm, $\lambda = 546\ m\mu$, Vergr. 1100 : 1

rühren oder ob auch mit dem Spaltmechanismus eine Fehlstellenerzeugung verbunden ist[3].

[3] An LiF soll sich durch die Wahl spezieller Lösungsmittel eine Unterscheidung zwischen „alten" und „frischen" Gitterstörungen treffen lassen. (Vergl. [7] und J. J. Gilman und W. G. Johnston, Dislocations and Mechanical Properties of Crystals, p. 116. New York, 1957.

Die Anordnung der Ätzgruben und damit der Fehlstellen läßt sich an allen Spaltflächen durch drei Verteilungsarten charakterisieren:

1. Willkürliche Anordnung der extrem seichten Ätzgruben mit Boden, die im allgemeinen sehr dicht liegen (Abb. 12).

Abb. 14. Ätzgrubenanordnung in Form von Ketten parallel zu Rißkanten. 40 sek in 0.1%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung. Vergr. 1500 : 1

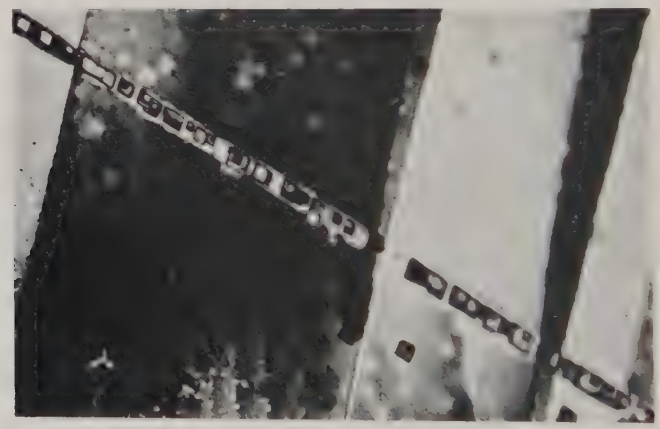

Abb. 15. Geschlossene Ätzgrubenkette, die sich aus verschieden tiefen Grübchen zusammensetzt. 20 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Interferogramm, $\lambda = 546$ mμ. Vergr. 950 : 1

2. Einzeln verteilte Ätzgruben in relativ großen Abständen. Sie sind im allgemeinen wesentlich größer als die vorhin erwähnten (Abb. 13).

3. Anordnung beider oben genannter Typen in Form von geraden Ketten (Abb. 14), wobei die Kette schon bei kleinen Ätzzeiten lückenlos geschlossen sein kann (Abb. 15). Die Ätzgrubenketten verlaufen jeweils

parallel zu einer der vier Rhomboederkanten und sprechen für das Wirksamwerden benachbarter Rhomboeder-Spaltflächen. Durch den Spaltvorgang kann eine Gleitung längs Rhomboederflächen eingeleitet werden, die durch Anätzen sichtbar gemacht wird [13]. Ähnliche Verteilungseigenschaften der Ätzgruben wurden auch an Diamantoktaederspaltflächen gefunden [14].

Im Anfangsstadium der Abtragung läßt sich der geometrische Mittelpunkt der Ätzgruben in erster Näherung mit dem Ort der Störstelle identifizieren. Daher ermöglicht die Ausmessung der Abstände der geometrischen Ätzgruben-Basismittelpunkte die Abstände ätzempfindlicher Fehlstellen zu bestimmen, wobei sich die in Tab. 3 angegebenen Werte zeigen.

Tabelle 3. Abstände der geometrischen Mittelpunkte benachbarter Ätzgruben (= Fehlstellenabstände)

Ätzgrubentype	Abstände	
	Mittelwert (μ)	Streuung (μ)
Seichte Gruben Hohe Dichte	4,5	1 bis 10
Seichte Gruben Mittlere Dichte	12,0	10 bis 20
Tiefe Pyramiden und -stümpfe	50,0	20 bis 70

Die Dichte der Störstellen läßt sich durch Auszählen der Ätzgruben innerhalb von Flächengebieten bekannter Größe bestimmen, wobei sich die Werte von Tab. 4 ergeben.

Tabelle 4. Mittelwerte der Ätzgrubendichten, an verschiedenen Spaltflächen gemessen

Ätzgrubentype	Ätzgrubendichte (Anzahl/cm^2)	
	Mittelwert	Streuung
Seichte Stümpfe	$2{,}5 \cdot 10^6$	$1{,}7 \cdot 10^6$ bis $4{,}3 \cdot 10^6$
Tiefe Pyramiden	$1{,}1 \cdot 10^4$	$1{,}0 \cdot 10^2$ bis $5{,}7 \cdot 10^4$
Tiefe Stümpfe	$1{,}0 \cdot 10^4$	$1{,}0 \cdot 10^2$ bis $5{,}5 \cdot 10^4$

Wie aus den in Tab. 4 angegebenen Werten hervorgeht, sind Störstellen, die lokal sehr begrenzte Gitterveränderungen hervorrufen, um einen Faktor 100 häufiger als solche, die sich sehr tief ins Kristallinnere erstrecken. Die angegebenen Dichtewerte liegen für Kristalle von verschiedenen Fundorten in derselben Größenordnung. Ein Vergleich

zwischen der Dichte ätzempfindlicher Störstellen mit der von PUCHEGGER nachgewiesenen Dichte von bruchauslösenden Kerbstellen zeigt, daß erstere um Größenordnungen höher ist [15].

Zusammenhang zwischen abgelöstem Kristallvolumen, Konzentration und Ätzdauer

Für die Berechnung des in Form von Pyramiden abgetragenen Kristallvolumens muß die Treppenstruktur durch eine Ebene angenähert werden, wobei unbekannt bleibt, wo die zur interferometrischen Ermittlung des Volumens eingeführte Ebene die Stufen schneidet oder berührt. Es treten dadurch von vornherein Fehler in der Volumsbestimmung auf, die aber geringer sind als die Meßunsicherheiten der übrigen zur Volumsberechnung erforderlichen Größen: D = längere Rhombendiagonale, d — kürzere Rhombendiagonale, H = Pyramidentiefe. Die Zeitabhängigkeit der Materialabtragung wird in Abb. 16 für zwei verschiedene Konzentrationen in doppelt-logarithmischem Maßstab dargestellt.

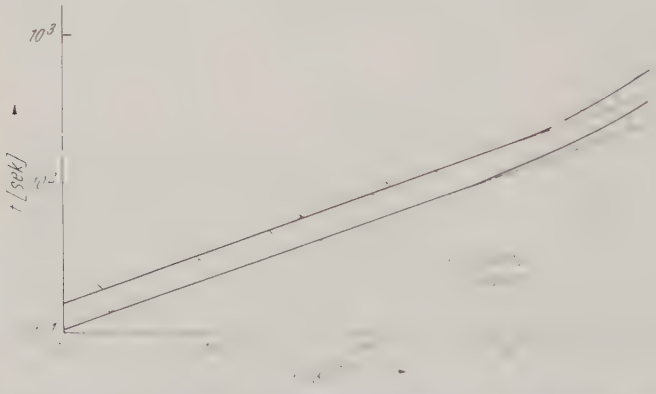

Abb. 16. Abgetragenes Kristallvolumen als Funktion der Ätzzeit für zwei verschiedene Konzentrationen eingezeichnet. Die Abweichung vom t^3-Gesetz tritt bei beiden Konzentrationen nach Ablösung der gleichen Volumina, also in derselben Tiefe unter der Spaltfläche ein

Bei kurzen Ätzzeiten und konstanter Konzentration zeigt das pyramidenförmig abgelöste Volumen V eine Proportionalität mit der dritten Potenz der Ätzzeit t und läßt sich näherungsweise durch die Beziehung

$$V(c, t) \approx K(c) \cdot t^3$$

darstellen.

Der Faktor $K(c)$ wird von den Auflösungsgeschwindigkeiten in Richtung der Rhombendiagonalen und der Pyramidentiefe, die Funktionen der Konzentration des Lösungsmittels sind, bestimmt. Es gilt:

$$K = \frac{v_D(c) \cdot v_d(c) \cdot v_H(c)}{6}.$$

Dabei werden v_D, v_d, v_H als Mittelwerte folgender Verhältnisse definiert,

$$v_D = \frac{\text{längere Rhombendiagonale}}{\text{Ätzdauer}}$$

$$v_d = \frac{\text{kürzere Rhombendiagonale}}{\text{Ätzdauer}}$$

$$v_H = \frac{\text{Pyramidentiefe}}{\text{Ätzdauer}}$$

die als lineare Ablösungsgeschwindigkeiten in den angegebenen Richtungen betrachtet werden können.

Für eine Konzentration von 0,02% z. B. ergeben sich für diese Mittelwerte:

$$v_H = 0{,}018\,\mu/\text{sek}$$
$$v_D = 0{,}30\ \mu/\text{sek}$$
$$v_d = 0{,}22\ \mu/\text{sek}$$
$$K = 2{,}03 \cdot 10^{-4}\,\mu^3/\text{sek}^3$$

Daraus läßt sich für jede beliebige andere Kristallrichtung die Ablösungsgeschwindigkeit innerhalb des gestörten Bereiches berechnen.

Bei Ätzzeiten > 180 sek tritt eine merkliche Abweichung vom t^3-Gesetz im Sinne einer scheinbaren Sättigung auf, weil die linearen Lösungsgeschwindigkeiten erheblich abnehmen.

Tabelle 5. Absolutwerte von v_D, v_d und v_H in Abhängigkeit von der Ätzdauer und ihr Verhältnis. $c = 0{,}02\%$

Ätzdauer (sek)	v_H (μ/sek)	v_D (μ/sek)	v_d (μ/sek)	$v_H : v_D : v_d$
20 bis 120	0,018	0,30	0,22	1 : 16 : 12
180	0,012	0,25	0,19	1 : 21 : 15
600	0,004	0,25	0,19	1 : 52 : 39
1200	0,003	0,18	0,13	1 : 60 : 45

Wie der Tab. 5 zu entnehmen ist, nimmt das Verhältnis der linearen Ablösungsgeschwindigkeiten zu, weil v_H bereits nach 180 sek auf 2/3 des Anfangswertes absinkt und nach 1200 sek nur mehr 1/6 des ursprünglichen Wertes besitzt, während v_D und v_d erst bei Ätzzeiten über 600 sek merklich abnehmen und nach 1200 sek ungefähr 2/3 bis 1/2 ihres anfänglichen Wertes aufweisen. Damit wird verständlich, daß sich die Form der Ätzgruben bei langen Ätzzeiten ändert (Abb. 17).

Die Abnahme der absoluten Beträge der Geschwindigkeiten und die Änderung in ihrem Verhältnis läßt sich mit der Wirksamkeit von Fehlstellen verknüpfen. Die Ablösungsgeschwindigkeit normal zur Spaltfläche, v_H, wird vorwiegend durch die dort vorhandene Gitterstörung bestimmt, während sich in tangentialer Richtung diesem die

Geschwindigkeit beeinflussenden Faktor noch jener überlagert, der den Abbau von den Kanten aus parallel zur Spaltfläche bestimmt. Erfolgt nun die Abtragung in den Grenzgebieten des gestörten Kristallvolumens, so wird zwangsläufig v_H sehr stark vermindert und parallel zur Spaltfläche ist nur mehr die Geschwindigkeit vorhanden, mit der die Ablösung idealer Gitterschichten von den Kanten aus fortschreitet, das heißt v_D und v_d setzen sich ebenfalls aus zwei Komponenten zusammen die durch die Lösungsgeschwindigkeit des idealen Gitters und der Gitterstörung bedingt werden. v_H, v_D, v_d sind also Funktionen der Konzentration des Lösungsmittels und der Energie der Gitterstörung.

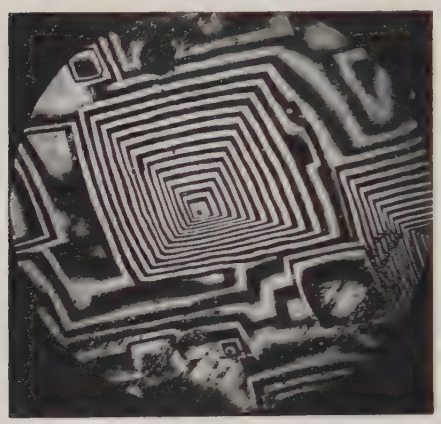

Abb. 17. Ätzfigur nach einer Ätzdauer von 1200 sek und bei einer Konzentration von 0,02%. Wesentlich geringere Neigung der Ätzgrubenwände gegen die Spaltfläche. Interferenzfarben. $\lambda = 546$ mμ, Vergr. 300 : 1

Ein Vergleich der bei verschiedenen Konzentrationen aber gleicher Ätzzeit abgetragenen Volumina zeigt, daß das abgelöste Kristallvolumen linear mit der Konzentration wächst und daher läßt sich das abgelöste Volumen als Funktion der Ätzdauer und Konzentration näherungsweise darstellen durch die Beziehung:

$$V(c,t) \approx a \cdot c \cdot t^3 \qquad \text{für} \qquad 0{,}02\% \leqslant c \leqslant 0{,}01\%$$
$$t \leqslant 60\,\text{sek}$$
$$a = K/c = 10^{12}\,\mu^6/\text{g sek}^3,$$

wenn man die Konzentration in Gramm/Liter mißt.

In ähnlicher Weise läßt sich auch das in Form von Pyramidenstümpfen abgetragene Volumen erfassen. Bis zur Ausbildung des flachen Bodens zeigt die Volumsabtragung ebenfalls die für Pyramiden dargestellte Abhängigkeit von der Ätzzeit. Nach Ausbildung des Bodens erfolgt, da die Geschwindigkeit normal zur Spaltfläche erfahrungsgemäß äußerst klein ist, die weitere Volumszunahme $V - V_0$ proportional mit dem Quadrat der Ätzzeit und läßt sich beschreiben durch:

$$V - V_0 = f(c) \cdot n \cdot s \cdot (t - t_0)^2$$

Dabei ist n die Stufenzahl innerhalb der Ätzgrube, s die Stufenhöhe, t die Gesamtätzdauer und t_0 die Ätzdauer bis zur Bodenbildung, das heißt die Zeit in der das Volumen $V_0 = a \cdot c \cdot t_0^3$ abgelöst wird.

$$f = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{D_1 \cdot d_1 - D_0 \cdot d_0}{(t - t_0)^2} + \frac{\sqrt{D_1 \cdot d_1}}{(t - t_0)} \cdot \sqrt{v_D(c) \cdot v_d(c)} + v_d(c) \cdot v_d(c) \right]$$

D_0, d_0 sind die Basisdiagonalen zur Zeit der Bodenbildung, D_1, d_1 nach der Bodenbildung.

Für die extrem seichten Ätzgruben mit Boden ist V_0 gegen V zu vernachlässigen, wenn t groß ist gegen t_0 und daher gilt für die Volumsabtragung:

$$V \approx f(c) \cdot s \cdot t^2 \qquad \text{da} \qquad n = 1$$

Da die Geschwindigkeit normal zur Spaltfläche nicht exakt Null ist, müßte dem Näherungsgesetz noch ein Korrekturglied hinzugefügt werden, welches das Kristallvolumen erfaßt, das normal zur Spaltfläche abgelöst wird.

Abschließend ist zu bemerken, daß v_D, v_d und v_H Mittelwerte der Ablösungsgeschwindigkeiten sind und nichts über den Verlauf der Lösungsgeschwindigkeiten in den einzelnen Phasen der Abtragung aussagen. Wegen der Stufenbildung innerhalb der Ätzgruben ist ein quasiperiodischer Verlauf von v_H, v_D und v_d zu erwarten.

Abb. 18. Sekundäre Ätzgruben an den Wänden und am Boden von primären auf der linken Bildseite. Ätzdauer 600 sek, Interferogramm, $\lambda = 546\ m\mu$, Vergr. 300 : 1

Sekundäre Ätzgrubenbildung

Da bei sehr langen Ätzzeiten die resistenten Böden innerhalb von Ätzgruben abgelöst werden, können an der folgenden gestörten Schichte wieder Ätzgruben ausgebildet werden, die als sekundäre Ätzgruben bezeichnet werden sollen, da ihre Entstehung mit Baufehlern gekoppelt ist, die nicht der ursprünglichen Spaltfläche angehören (Abb. 18, 19). Bei weiterer Ätzung treten auch Ätzgruben höherer Ordnung auf.

Diese sekundäre Ätzgrubenbildung dürfte die Ursache für die von Pfefferkorn beschriebene Aufrauhung der Ätzflächen sein [4].

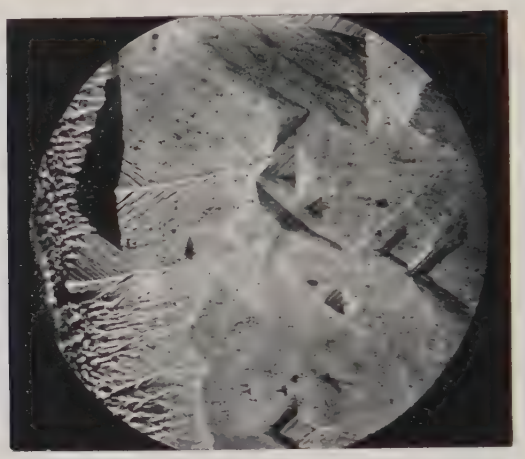

Abb. 19. Sekundäre Ätzgruben. Außer deutlicher Pyramiden und -Stumpfe sind auch sehr feine Ätzgruben an den Bodenflächen der primären verhanden. 1200 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt, Schrägbeleuchtung, Vergr. 300 : 1

Herrn Professor Dr. A. G. Smekal bin ich zu Dank verpflichtet, daß er es mir ermöglicht hat, diese Arbeiten im Physikalischen Institut der Universität Graz durchzuführen. Ihm und Professor Dr. J. Wagner danke ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen.

Literatur

1. Smekal, A. G., Handb. d. Phys. **24**/2, Kap. 5, 797, Bln. (1933).
Buerger, M. J., Z. f. Krist. **89**, 195 (1934).
Renninger, M., Z. f. Krist. **89**, 344 (1934).
2. Balarew, D., Z. f. Krist. **89**, 268 (1934).
Renninger, M., Z. f. Krist. **89**, 344 (1934).
Graf, L., Z. f. Phys. **121**, 73 (1943).
Mahl, H. und I. N. Stransky, Z. f. Metallk. **35**, 147 (1943)
Zapfe, C. A., Trans. Am. Soc. Met. **42**, 387 (1950).
3. Allison, S. K., Phys. Rev. **38**, 203 (1931); **41**, 1 (1932).
Parratt, Phys. Rev. **44**, 328 (1932).
4. Pfefferkorn, G., Fortschr. Min. **29**/**30**, 34 (1950); Z. f. wiss. Mikros. 60 (1952); N. Jb. Min. Abh. **84**, 3, 281 (1952).
Pfefferkorn, G. und H. Westermann, N. Jb. Min. 97 (1950).
5. Hettich, A., Z. f. Krist. **64**, 265 (1926).
Hertzfeld, K. F. und A. Hettich, Z. f. Phys. **38**, 1 (1926); **40**, 327 (1927).
6. Friedel, G., C. R. Acad. Sci. Paris **184**, 789 (1927).
Kleber, W., Z. f. Krist (A) **102**, 455 (1940).
7. Gilman, J. J., W. G. Johnston und G. W. Sears, J. Appl. Phys. **29**, 747 (1958).

8. Tolansky, S., The Microstructures of Diamond Surfaces, London (1955).
9. Gabler, F., Mikros. **10**, 119 (1955).
10. Krug, W., Feingerätetechn. 387 (1955).
11. Amelinckx, S., Acta Met. **2**, 848 (1954); Phil. Mag. Ser. **8**, **1**, 269 (1956).
12. Kleber, W., Angew. Gitterphys. 2. Aufl., Bln. (1949).
13. Johnston, W. G. und J. J. Gilman, J. Appl. Phys. **30**, 129 (1959).
14. Patel, A. R. und S. Tolansky, Proc. Roy. Soc., London A **243**, 41 (1957).
15. Puchegger, F., Diss. Univ. Graz (1954).

On the General Form of the Special Theory of Relativity. II.

By

M. Z. v. Krzywoblocki

Champaign, Illinois, USA

(*Received February 4, 1960*)

Summary

In Ref. [1] the author derived the fundamental transformation equations in the general form of the special theory of relativity under the assumption that the reference velocity, which is assumed in the classical special theory of relativity to be a constant and equal to the velocity of light in vacuo, is a variable function of position and time. In the present work the author discusses various characteristic properties of this transformation like: the proper (eigen) velocity-time interval, transformation when the characteristic time remains invariant under the group of transformations, addition of velocities, etc.

1. Previous Results

In Ref. [1] the author derived the equations of the special theory of relativity under the assumption that the reference velocity, which is assumed to be a constant in the classical form of the special theory of relativity, is a variable function of position and time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity u relative to S. The axes are chosen so that the x-axes and the $\{x, y\}$-planes in the two frames slide along each other. The reference velocity c is assumed to be a function of the position and time, i.e., $c = c(x, y, z, t)$ and $c' = c'(x', y', z', t')$. The most general forms of transformations are:

$$x = (c^2 - u^2)^{-1/2}(c\,x' + u\,c'\,t') - \int [x'\,d\big(c(c^2 - u^2)^{-1/2}\big) + u\,t'\,d\big(c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\big)]; \tag{1.1}$$

$$t = (c^2 - u^2)^{-1/2}(c'\,t' + u\,x'\,c^{-1}) - \int [t'\,d\big(c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\big) + u\,x'\,d\big(c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\big)]; \tag{1.2}$$

$$x' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}(c'\,x - u\,c\,t) - \int [x\,d\big(c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big) - u\,t\,d\big(c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big)]; \tag{1.3}$$

$$t' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}(c\,t - u\,c'^{-1}\,x) - \int [t\,d\big(c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big) - u\,x\,d\big(c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\big)]. \quad (1.4)$$

Another forms of these transformations are:

$$x = \int c(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' + u\int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'; \quad (1.5)$$

$$t = u\int c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' + \int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'; \quad (1.6)$$

$$x' = \int c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dx - u\int c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dt; \quad (1.7)$$

$$t' = \int c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dt - u\int c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dx. \quad (1.8)$$

Obviously:

$$dy = dy'; \qquad dz = dz'. \quad (1.9)$$

These transformation equations were derived under the assumption that the "distance" in the four-dimensional space $\{x, y, z, t\}$ between two points P_1 and P_2 in S, or between two corresponding points P_1' and P_2' in S', is an invariant one:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c'^2(dt')^2. \quad (1.10)$$

As it is well-known, the velocity of light in vacuo differs from the velocity of light in material media. Moreover the velocity of light in the plasma exceeds its velocity in vacuo (see, for instance Ref. [3]).

2. The Proper Velocity-time Interval

In the classical special theory of relativity they introduced the so-called proper time interval. Suppose two events have the space and time coordinates $\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ and $\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$, respectively. Let us construct the difference between the squared time interval and the squared distance in the three-dimensional space, $\{x, y, z\}$, divided by c^2 (call it τ_{12}^2), thus obtaining in the frame S:

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - c^{-2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]. \quad (2.1)$$

Obviously in the frame S':

$$\tau_{12}'^2 = (t_2' - t_1')^2 - c^{-2}[(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2]. \quad (2.2)$$

Expressing τ_{12}' in terms of S-quantities, one can show in a straightforward manner that

$$\tau_{12}'^2 = \tau_{12}^2. \quad (2.3)$$

Briefly, the "proper time interval", τ_{12}^2, is an invariant with respect to the Lorentz transformation equations. Bergmann, Ref. [2, p. 41], calls all the linear transformations with respect to which τ_{12}^2 is invariant,

Lorentz transformations, regardless of whether the relative motion of the two systems takes place along the common X-axis or not. In the classical special theory of relativity Bergmann, Ref. 2, p. 41], states that the invariance of τ_{12}^2 implies the invariance of the speed of light, for the path of a light ray is characterized by the equality $\tau_{12}^2 = 0$ for all pairs of points along its path. This is so, since along a light ray one has:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \tag{2.4}$$

or

$$(t_2 - t_1)^2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]\, c^{-2}. \tag{2.5}$$

Bergmann [2] points out the physical significance of the quantity τ_{12}^2. Assume a frame of reference with respect to which both events take place at the same space point. Then τ_{12} is the time recorded by a clock at rest in that frame of reference. Bergmann [2] calls τ_{12} the proper time interval or the eigen-time interval.

In the previous paper, the whole approach to the general form of the special theory of relativity was based upon the invariance of the "infinitesimal distance" in the four-dimensional $\{x, y, z, t\}$ space:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 =$$
$$= (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c'^2(dt')^2, \tag{2.6}$$

in both frames of reference, S and S'. Dividing Eq. (2.6) by c^2 and multiplying it by (-1), gives:

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]; \tag{2.7}$$

similarly:

$$(d\tau')^2 = (dt')^2 - c'^{-2}[(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2]. \tag{2.8}$$

The transformation formulas give (see Eqs. (1.5) to (1.9)):

$$dx' = c'(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx - u\, c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dt; \tag{2.9}$$

$$dt' = -u\, c'^{-1}(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dx + c(c'^2 - u^2)^{-1/2}\, dt; \tag{2.10}$$

$$dy' = dy; \quad dz' = dz. \tag{2.11}$$

Inserting Eqs. (2.9) to (2.11) into the form (2.8) furnishes:

$$(d\tau')^2 = (c^2/c'^2) \cdot (d\tau)^2; \qquad c'^2(d\tau')^2 = c^2(d\tau)^2, \tag{2.12}$$

and consequently $(d\tau)^2$ is not an invariant one, but $c^2(d\tau)^2$ is. This may be called the proper velocity-time interval or eigen velocity-time interval.

This result shows that again the path of a ray, along which one moves with the velocity c (or c'), is characterized by the equality $c^2(d\tau)^2 = 0$ for all infinitesimal pairs of points along its path (i.e., $d\tau = (\tau_2 - \tau_1) \to 0$), since:

$$c^2(dt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2; \qquad (dt)^2 = c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2], \tag{2.13}$$

with a similar result in the S' frame:

$$c'^2(dt')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2. \tag{2.14}$$

On the other hand, this result suggests that perhaps we should base our entire approach to the general form of the special theory of relativity also on the invariance of $(d\tau)^2$, Eq. (2.7), and not only on the invariance of $(ds)^2$, Eq. (2.6). But one can easily show that this leads to a contradiction. Namely, let us calculate $(dt')^2$ from the condition $(d\tau)^2 = (d\tau')^2$, using Eqs. (2.7) and (2.8), and let us insert the so obtained value into the expression for $(ds')^2$, Eq. (2.6); this furnishes:

$$(ds')^2 = c'^2 c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2], \tag{2.15}$$

or with the use of Eq. (2.6) again:

$$(ds')^2 = c'^2 c^{-2}(ds')^2 \tag{2.16}$$

which is only possible when $c^2 = c'^2$. But then one may suggest another alternative: The general form of the special theory of relativity, as exposed in Ref. [1] is based upon the invariance of the infinitesimal distance $(ds)^2$, where "s" is measured in units of length. Perhaps it is more appropriate to base the foundations of the special theory of relativity upon the invariance of the infinitesimal time, $(d\tau)^2$ (with τ measured in units of time). This alternative is discussed in the following chapter.

3. Transformation of Coordinates

We shall derive the transformation formulas when the reference velocity (assumed in the classical theory to be a constant equal to the velocity of light in vacuum) is a variable function of space and time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity u relative to S. The axes are chosen so that the x-axes and the $\{x, y\}$-planes in the two frames slide along each other. At the origins, let us count time from the instant at which these points momentarily coincide. Let t be the time at which some event happens at a point $\{x, y, z\}$, as measured by the observer on S frame, and let $\{x', y', z', t'\}$ be the coordinates and time of the same event as measured by the observer on S'. The analysis is performed under the assumption that the reference velocity c (constant in the classical theory) is a function of the position and time, i.e., $c = c(x, y, z, t)$ or $c' = c'(x', y', z', t')$. The fundamental requirement of the special theory of relativity in the present case is, that the "infinitesimal time" between two points P_1 and P_2 in S, or the corresponding points P_1' and P_2' in S', be invariant, i.e.:

$$\begin{aligned}(d\tau)^2 &= (dt)^2 - c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] = \\ &= (d\tau')^2 = (dt')^2 - c'^{-2}[(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2].\end{aligned} \tag{3.1}$$

The form of the Lorentz transformation in the classical theory is well-known (c^2 = universal constant):

$$x' = \bar{\gamma}(x - u\,t); \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = \bar{\gamma}(t - u\,c^{-2}\,x); \tag{3.2a}$$

$$\bar{\gamma} = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = c(c^2 - u^2)^{-1/2}, \tag{3.2b}$$

or

$$x = \bar{\gamma}(x' + u\,t'); \qquad y = y'; \qquad z = z'; \qquad t = \bar{\gamma}(t' + u\,c^{-2}\,x'). \tag{3.3}$$

In the present case we require that the characteristic time $(d\tau)$ remains invariant under the following group of transformations:

$$x' = \alpha_1 x - \beta_1 u t; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad t' = \gamma_1 t - \delta_1 u x c^{-2}, \tag{3.4}$$

where, in general, the coefficients $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, are functions of $\{x, t, c\}$ and u, with u playing a role of a parameter. Hence:

$$\alpha_1 = \alpha_1(x, t, c; u); \qquad \beta_1 = \beta_1(x, t, c; u);$$
$$\gamma_1 = \gamma_1(x, t, c; u); \qquad \delta_1 = \delta_1(x, t, c; u). \tag{3.5}$$

An elementary operation yields:

$$x = C_1 x' - B_1 u t'; \qquad t = A_1 t' - D_1 u x' c'^{-2}, \tag{3.6}$$

with $A_1 = A_1(x', t', c'; u)$, etc. The following relations must be satisfied:

$$A_1 = \alpha_1 c^2 J^{-1}; \qquad -B_1 = \beta_1 c^2 J^{-1}; \qquad C_1 = \gamma_1 c^2 J^{-1};$$
$$-D_1 = \delta_1 c'^2 J^{-1}; \tag{3.7a}$$

$$\alpha_1 = A_1 J'^{-1}; \qquad -\beta_1 = B_1 J'^{-1}; \qquad \gamma_1 = C_1 J'^{-1};$$
$$-\delta_1 = c^2 c'^{-2} D_1 J'^{-1}, \tag{3.7b}$$

where the determinants:

$$J = c^2 \alpha_1 \gamma_1 - u^2 \beta_1 \delta_1; \qquad J' = A_1 C_1 - u^2 c'^{-2} B_1 D_1, \tag{3.8a}$$
$$J' = c^2 J^{-1}, \tag{3.8b}$$

cannot be equal to zero. From Eqs. (3.6) one gets:

$$dx = C_1 dx' + x' dC_1 - u B_1 dt' - u t' dB_1; \tag{3.9}$$
$$dt = A_1 dt' + t' dA_1 - u c'^{-2} D_1 dx' - u x' d(c'^{-2} D_1); \tag{3.10}$$

or

$$dx = K_1 dx' - u L_1 dt'; \qquad dt = -M_1 u^{-1} dx' + N_1 dt', \tag{3.11}$$

where:

$$K_1 = C_1 + x' \partial C_1/\partial x' - u t' \partial B_1/\partial x; \tag{3.12}$$
$$L_1 = B_1 - u^{-1} x' [\partial C_1/\partial t' + (\partial C_1/\partial y') v' + (\partial C_1/\partial z') w'] +$$
$$+ t' [\partial B_1/\partial t' + (\partial B_1/\partial y') v' + (\partial B_1/\partial z') w']; \tag{3.13}$$
$$M_1 = u^2 c'^{-2} D_1 + u^2 x' \partial/\partial x' (D_1 c'^{-2}) - t' u \partial A_1/\partial x'; \tag{3.14}$$
$$N_1 = A_1 + t' [\partial A_1/\partial t' + (\partial A_1/\partial y') v' + (\partial A_1/\partial z') w'] -$$
$$- u x' [\partial/\partial t' (D_1 c'^{-2}) + (\partial/\partial y' (D_1 c'^{-2})) v' + (\partial/\partial z' (D_1 c'^{-2})) w']. \tag{3.15}$$

with

$$dy'/dt' = v'; \qquad dz'/dt' = w'.$$

Keeping in mind that $y' = y, z' = z$, one gets:

$$(dt)^2 - c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2] =$$
$$= N_1^2 (dt')^2 - 2 M_1 u^{-1} N_1 dx' dt' + M_1^2 u^{-2} (dx')^2 +$$
$$+ \ldots = (dt')^2 - c'^{-2}[(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2]; \tag{3.16}$$

or:

$$(N_1^2 - c^{-2} u^2 L_1^2 - 1)(dt')^2 + 2(K_1 L_1 u c^{-2} - M_1 u^{-1} N_1) dx' dt' +$$
$$+ (M_1^2 u^{-2} - c^{-2} K_1^2 + c'^{-2})(dx')^2 + (c'^{-2} - c^{-2})(dy')^2 +$$
$$+ (c'^{-2} - c^{-2})(dz')^2 = 0. \tag{3.17}$$

Since $\{x', y', z', t'\}$ are independent variables, and can take arbitrarily different values independently one of each other, the coefficients of dx', dy', dz', dt' must be separately equal to zero, which immediately leads to a conclusion that $c^2 = c'^2$; thus this case must be disregarded and the only possibility left is the case $(ds)^2 = (ds')^2$. From the forms of the transformation Eqs. (1.1) to (1.4), it is obvious that there appear imaginary values for $u > c$ or $u > c'$. This transformation is defined only for relative velocities smaller than c or c'.

4. Addition of Velocities

Let us consider a superposition of two or more transformations of the kind, derived above. Suppose we have three frames of reference, S, S', S''; let S' possess the velocity v relative to S, and S'' the velocity w relative to S'. The purpose of the analysis is to derive the transformation equations connecting S'' and S. We put down:

$$x' = \int c'(c'^2 - v^2)^{-1/2}\,dx - v\int c(c'^2 - v^2)^{-1/2}\,dt; \tag{4.1}$$

$$t' = \int c(c'^2 - v^2)^{-1/2}\,dt - v\int c'^{-1}(c'^2 - v^2)^{-1/2}\,dx; \tag{4.2}$$

$$x'' = \int c''(c''^2 - w^2)^{-1/2}\,dx' - w\int c'(c''^2 - w^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{4.3}$$

$$t'' = \int c'(c''^2 - w^2)^{-1/2}\,dt' - w\int c''^{-1}(c''^2 - w^2)^{-1/2}\,dx'; \tag{4.4}$$

$$y' = y; \qquad z' = z; \qquad y'' = y'; \qquad z'' = z'. \tag{4.5}$$

In the next step we have to substitute the first set into the second one, thus obtaining:

$$x'' = \int \frac{dx}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} - \int \frac{u\,dt}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}; \tag{4.6}$$

$$t'' = \int \frac{dt}{(c''/c)(1 - u^2/c^2)^{1/2}} - \int \frac{(u/c^2)\,dx}{(c''/c)(1 - u^2/c^2)^{1/2}}; \tag{4.7}$$

$$u = c(c'\,w + c''\,v)(c'\,c'' + v\,w)^{-1}; \tag{4.8}$$

applying integration by parts one obtains formulas which are similar to formulas in the classical case:

$$x'' = \frac{x - u\,t}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} - \int x\,d[(1 - u^2/c^2)^{-1/2}] + \int t\,d[u(1 - u^2/c^2)^{-1/2}]; \tag{4.9}$$

$$t'' = \frac{t - (u/c^2)\,x}{(c''/c)(1 - u^2/c^2)^{1/2}} - \int t\,d[(c''/c)^{-1}(1 - u^2/c^2)^{-1/2}] + \tag{4.10}$$

$$+ \int x\,d[(u/c^2)(c''/c)^{-1}(1 - u^2/c^2)^{-1/2}].$$

One may state that two transformations, carried out one after the other are equivalent to one Lorentz transformation, given by Eqs. (4.9) and (4.10). But the relative velocity of S'' with respect to S, u, is not simply the sum of v and w. Eq. (4.8) can be written in the form:

$$u = c\left[1 - \frac{(c'/c - v'c)(c''/c - \bar{w}/c)}{(c'c''/c^2) + v\,\bar{w}/c^2}\right], \tag{4.11}$$

which shows that u cannot be equal to or greater than c as long as both $v < c'$ and $w < c''$. Thus, it is impossible to combine several transformations in one involving the relative velocity $u > c$. The transformation equations imply that again no frame of reference can have a velocity greater than c with respect to any other inertial system.

5. The Proper Time of a Body

Assume a material body moving along a path (not necessarily a straight line). In the classical special theory of relativity they apply the notion of the proper time interval (discussed in Section 2) to the motion of such a body. Let us divide Eq. (2.7) by $(dt)^2$, thus obtaining a relation between the coordinate time t, and the proper time τ (body's own time or the time shown by a clock rigidly connected with the moving body):

$$d\tau/dt = (1 - u^2/c^2)^{1/2}; \qquad \tau = \int_{\cdot}^{\cdot} (1 - u^2/c^2)^{1/2}\,dt, \tag{5.1}$$

where

$$u = [(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2]^{1/2}$$

is the velocity of the body. In the classical special theory of relativity both $d\tau$ and τ are invariant under Lorentz transformations (though dt and u are not). In the case of the general transformations, derived above, we have shown in Section 2 that $d\tau$ (and consequently τ) is not any more an invariant under the general transformations.

References

1. Krzywoblocki, v., M. Z.: On the General Form of the Special Theory of Relativity. Acta Physica Austriaca.
2. Bergmann, P. G.: Introduction to the Theory of Relativity. Prentice-Hall, Inc., New York, 1942.
3. Tamm, I. E.: Radiation of Particles With Speeds Greater Than That of Light Americal Scientist, Vol. 47, No. 2, June 1959, pp. 169—177.

Über ein hydrodynamisches Analogon zum Skineffekt im elliptischen Zylinder

Von

Josef Bauer und **Egon Pfleger**

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 1 Abbildung

(*Eingegangen am 14. April 1960*)

Zusammenfassung

Anläßlich seiner Untersuchungen zum Turbulenzproblem konnte von Th. Sexl im Jahre 1928 rein theoretisch ein hydrodynamischer Effekt vorausgesagt werden, der das Analogon zum elektrodynamischen Skineffekt darstellt. Dieser theoretisch vorausgesagte Effekt besteht darin, daß die Amplituden der Schwingungen einer oszillierenden Laminarströmung in einem kreiszylindrischen Rohr an die Wand gedrängt werden. Er wurde im Jahre 1929 tatsächlich von E. G. Richardson und E. Tyler experimentell aufgefunden und „Annulareffekt" benannt. Die vorliegende Arbeit erweitert diese Untersuchungen auf ein Rohr von elliptischem Querschnitt. Für kleine Reynoldssche Zahlen erhält man eine im Rohr mit der Periode der die Bewegung aufrecht erhaltenden Kraft pulsierende Flüssigkeit mit einem der stationären Strömung entsprechenden Geschwindigkeitsprofil. Für große Reynoldssche Zahlen hat die Strömung den Charakter einer Prandtlschen Grenzschichtströmung, wobei gleichfalls der oben erwähnte Annulareffekt auftritt. Artet das elliptische Rohr in ein kreisförmiges aus, gehen die Formeln in die entsprechenden für ein Rohr mit kreiszylindrischem Querschnitt über.

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt im Anschluß an eine Untersuchung von Th. Sexl [1] die oszillierende Rohrströmung in einem Zylinder von elliptischem Querschnitt. Diese Strömung stellt das hydrodynamische Analogon zum elektrodynamischen Skineffekt dar.

Gelegentlich einiger systematischer Untersuchungen zum Turbulenzproblem fand Sexl [2] gewisse nichtstationäre Lösungen der Navier-Stokesschen Differentialgleichungen, die dem Charakter der turbulenten Strömungen entsprachen. Unter den Integralen, die bei der Integration der für das Problem charakteristischen Differentialgleichung gewonnen wurden, befand sich nun auch jenes, das die Erklärung des später von E. G. Richardson und E. Tyler [3] experimentell aufge-

fundenen Effektes lieferte. Diese Autoren bemerkten anläßlich von Untersuchungen über Luftschwingungen in Helmholtzschen Resonatoren, daß die Amplituden der Schwingungen für Radien, die vom Zentrum des Resonators entfernt waren, entgegen allen Erwartungen, weit größer waren als im Zentrum selbst; und diese Amplituden in der Nähe der Resonatorwände sogar ein Maximum erreichten, um dann rasch gegen Null an der Wand selbst herabzusinken. Diese Erscheinung wurde als „Annulareffekt" bezeichnet und von Th. Sexl [1] auf der Grundlage der Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik als oszillierende Laminarströmung in einem Kreisrohr theoretisch gedeutet. Dabei ergab sich, daß dieser Vorgang sogar als eine einfache Grenzschichtströmung im Sinne Prandtls bei hohen Reynoldsschen Zahlen aufgefaßt werden konnte. Aus der Diskussion des Integrals wurde im Einklang mit dem experimentellen Befund auch eine qualitative Übereinstimmung mit den Experimenten von Richardson gefunden.

Unter der Voraussetzung, daß es sich um ein „unendlich langes" Rohr handelt, die Erscheinung also von der Koordinate in der Richtung der Rohrachse unabhängig ist, soll in der vorliegenden Arbeit diese Untersuchung für ein Rohr von elliptischem Querschnitt durchgeführt werden.

2. Aufstellung und Lösung der Bewegungsgleichung

Es seien z die Koordinate in Richtung der Rohrachse, ξ und η die entsprechenden elliptischen Koordinaten, die mit den kartesischen Koordinaten durch die Transformationsformel $x + iy = h \operatorname{Cos}(\xi + i\eta)$ zusammenhängen. Dabei ist h die lineare Exzentrizität der Querschnittsellipse. Unter der in der Einleitung gemachten Voraussetzung, daß es sich um ein langes Rohr von elliptischem Querschnitt handelt, können wir annehmen, daß der Vorgang von z unabhängig ist. Wenn die Geschwindigkeitskomponente w in Richtung der Rohrachse von z unabhängig ist, verschwinden die übrigen Geschwindigkeitskomponenten und damit in der Bewegungsgleichung längs der Rohrachse die konvektiven Beschleunigungsglieder. Man erhält somit aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen der Hydrodynamik ohne jede Vernachlässigung

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Dabei bedeuten: ν = kinematische Zähigkeit, p = Druck,
w = Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung.

Der durch die Stempelbewegung hervorgerufene Druckgradient sei harmonisch, also

$$Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = C\cos\beta t, \tag{2}$$

wobei C eine Konstante bedeutet. Es empfiehlt sich aber, hier die komplexe Schreibweise zu verwenden, also zu setzen

$$Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = C\, e^{i\beta t},$$

wo nur dem Realteil physikalische Bedeutung zukommt. Setzt man die Geschwindigkeit an in der Form

$$w(x, y, t) = f(x, y) \cdot e^{i\beta t},$$

so erhält man für die Amplitudenverteilung $f(x, y)$ aus (1) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - i\frac{\beta}{\nu} \cdot f = -\frac{C}{\nu}. \tag{1 a}$$

Ein partikuläres Integral dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$f_p = -i\frac{C}{\beta}. \tag{3}$$

Da die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - i\frac{\beta}{\nu} \cdot f = 0 \tag{1 b}$$

durch die Substitution $f = e^{imx}$ befriedigt wird [mit $m^2 = -(i\,\beta/\nu)$], liegt für die Umrechnung auf elliptische Zylinderkoordinaten folgender Ansatz nahe:

$$f(\xi, \eta) = e^{imh\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta}.$$

Man erhält zunächst

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = (i\,m\,h\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta - m^2 h^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\xi\cos^2\eta) \cdot e^{imh\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = (-i\,m\,h\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta - m^2 h^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\xi\sin^2\eta) \cdot e^{imh\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta}$$

und somit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + m^2 h^2\,(\mathfrak{Cof}^2\,\xi\sin^2\eta + \mathfrak{Sin}^2\,\xi\cos^2\eta) \cdot f = 0.$$

Eine einfache Umformung mit

$$k^2 = \frac{1}{4}m^2 h^2$$

ergibt die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + 2k^2\,(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta) \cdot f = 0. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung resultieren durch den Separationsansatz

$$f = \chi(\xi) \cdot \Phi(\eta)$$

die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} - (a - 2k^2 \operatorname{Cof} 2\xi) \cdot \chi = 0 \tag{5 a}$$

und

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (a - 2k^2 \cos 2\eta) \cdot \Phi = 0. \tag{5 b}$$

Dabei ist a die Separationskonstante. Man bemerkt sofort, daß (5 a) aus (5 b) durch die Transformation $\eta = i\,\xi$ hervorgeht. Es genügt daher, die allgemeine Lösung von (5 b) zu kennen, da man durch diese Transformation sofort jene von (5 a) gewinnt. Die Gleichung (5 b) stellt die kanonische Form der Mathieuschen Differentialgleichung dar ([4] und [5]).

Da die Geschwindigkeitsverteilung symmetrisch entlang der kleinen und großen Achse der begrenzenden Ellipse des Rohrquerschnittes ist, muß $\Phi(\eta)$ gerade, eindeutig und periodisch in η mit der Periode π sein. Die einzige Lösung von (5 b), die diese Eigenschaft hat, ist die gerade Mathieusche Funktion der ersten Art von geradzahliger Ordnung, nämlich

$$ce_{2n}(\eta, -k^2) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{(2r)}^{(2n)} \cos 2r\eta, \tag{6}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad A_{(2r)}^{(2n)} \ldots \text{stetige Funktion von } -k^2.$$

Schreibt man $i\,\xi$ für η in (6), so erhält man die Lösung von (5 a) für dieselben Werte von a, $-k^2$, nämlich die modifizierte Mathieusche Funktion der ersten Art von geradzahliger Ordnung:

$$Ce_{2n}(\xi, -k^2) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{(2r)}^{(2n)} \operatorname{Cof} 2r\xi. \tag{7}$$

Daraus folgt sofort:

$$\chi(\xi) \cdot \Phi(\eta) = Ce_{2n}(\xi, -k^2) \cdot ce_{2n}(\eta, -k^2).$$

Mit der willkürlichen Konstanten C_{2n} erhält man

$$\chi_{2n}(\xi) \cdot \Phi_{2n}(\eta) = C_{2n}\, Ce_{2n}(\xi, -k^2) \cdot ce_{2n}(\eta, -k^2)$$

als einzige zulässige Lösung der Gleichung (4).

Die formale Lösung der Gleichung (1 b) in elliptischen Koordinaten lautet daher:

$$f_h = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}\, Ce_{2n}(\xi, -k^2)\, ce_{2n}(\eta, -k^2). \tag{8}$$

Mit (3) und (8) bekommt man die allgemeine Lösung von (1 a) in diesen Koordinaten:

$$f = f_p + f_h = -\frac{i\,C}{\beta} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}\, Ce_{2n}(\xi, -k^2) \cdot ce_{2n}(\eta, -k^2). \tag{9}$$

Durch die Grenzbedingungen, die das Endlichbleiben für $\xi = 0$ und das Verschwinden der Geschwindigkeitskomponente für $\xi = \xi_0$ am Rohrumfang festlegen, bestimmt sich die Konstante C_{2n} aus (9), indem man (9) beiderseits mit $ce_{2n}(\eta, -k^2)$ multipliziert und über η von 0 bis 2π integriert. Man erhält unter Berücksichtigung der Orthogonalitätseigenschaften der MATHIEUschen Funktionen zunächst

$$\frac{iC}{\beta}\int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, -k^2)\,d\eta = C_{2n}\,Ce_{2n}(\xi_0, -k^2)\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, -k^2)\,d\eta.$$

Die Normierungsbedingungen (vergleiche etwa [4]) liefern

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, -k^2)\,d\eta = 2\pi\cdot A_0^{(2n)} \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, -k^2)\,d\eta = \pi.$$

Es ergibt sich mit diesen Werten aus (9) das uns interessierende Integral von (1 a) zu

$$f = -\frac{iC}{\beta} + \frac{2\,(iC/\beta)\sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)}\,Ce_{2n}(\xi, -k^2)\cdot ce_{2n}(\eta, -k^2)}{Ce_{2n}(\xi_0, -k^2)}.$$

Berücksichtigt man noch, daß $w = f\cdot e^{i\beta t}$ gesetzt wurde, erhält man schließlich die Lösung von (1) in den Koordinaten des Problems:

$$w = -\frac{iC}{\beta}\left[1 - \frac{2\sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)}\,Ce_{2n}(\xi, -k^2)\cdot ce_{2n}(\eta, -k^2)}{Ce_{2n}(\xi_0, -k^2)}\right]\cdot e^{i\beta t}. \tag{10}$$

Wir gehen nun zur Diskussion von (10) über.

3. Diskussion des Integrals

a) Für langsame Schwingungen ($\sqrt{\beta/\nu}\cdot\xi_0$ klein), oder, mit anderen Worten, bei kleinen REYNOLDSschen Zahlen (es ist nämlich $\nu = \eta/\varrho$ und $\varrho\,\bar{v}\,\xi_0/\eta = (\beta/\nu)\,\xi_0^2 = \mathrm{Rey} \ll 1$) ergibt Gleichung (10), wenn man die Reihenentwicklungen für die MATHIEUschen Funktionen

$$2^{1/2}\,ce_0(\eta, -k^2) = 1 - \frac{k^2}{2}\cos 2\eta$$

$$Ce_0(\xi, -k^2) = 1 - \frac{k^2}{2}\mathfrak{Cof}\,2\xi$$

nach dem zweiten Glied abbricht und beachtet, daß $A_0^0 = 1/\sqrt{2}$ und $k^2 = -(i\,\beta/4\,\nu)\,h^2$ ist,

$$w = -\frac{iC}{\beta}\left[1 - \frac{\left(1 + \frac{i\beta}{8\nu}h^2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi\right)\left(1 + \frac{i\beta}{8\nu}h^2\cos 2\eta\right)}{\left(1 + \frac{i\beta}{8\nu}h^2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi_0\right)}\right]e^{i\beta t}. \tag{10 a}$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Relationen

$$\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta = \mathfrak{Sin}^2\xi\cos^2\eta - \mathfrak{Cof}^2\xi\sin^2\eta + \mathfrak{Cof}^2\xi\cos^2\eta - \mathfrak{Sin}^2\xi\sin^2\eta$$

$$\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta = 2\,(\mathfrak{Cof}^2\xi\cos^2\eta + \mathfrak{Sin}^2\xi\sin^2\eta)$$

erhält man nach einer längeren, aber einfachen Umformung

$$w = \frac{C}{4\nu}\,[B - (1+A)\,h^2\,\mathfrak{Cof}^2\xi\cos^2\eta - (1-A)\,h^2\,\mathfrak{Sin}^2\xi\sin^2\eta]\,e^{i\beta t} \tag{10 b}$$

Aus der Definitionsgleichung der elliptischen Koordinaten

$$x + i\,y = h\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta)$$

findet man durch Trennung von Real- und Imaginärteil

$$x = h\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta \qquad \text{und} \qquad y = h\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta,$$

so daß (10 b) folgende Gestalt annimmt:

$$w = \frac{C}{4\nu}\,[B - (1+A)\,x^2 - (1-A)\,y^2]\,e^{i\beta t}. \tag{10 c}$$

Man zeigt leicht, daß der Klammerausdruck in (10 c) die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{B}{1+A}} \qquad \text{und} \qquad b = \sqrt{\frac{B}{1-A}}$$

darstellt. Durch direkte Ausrechnung resultiert sofort

$$A = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{2\,a^2 b^2}{b^2 + a^2}.$$

Setzt man diese Werte in (10 c) ein und berücksichtigt man nur den reellen Teil dieser Gleichung, so erhält man

$$w = \frac{C\,a^2 b^2}{2\nu\,(b^2 + a^2)}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]\cos\beta t, \tag{11}$$

also, wie zu erwarten, eine im Rohr mit der Periode der die Bewegung aufrechterhaltenden Kraft $2\pi\beta$ pulsierende Flüssigkeit. Für $\beta \to 0$ erhält man die stationäre Poiseuillesche Strömung im elliptischen Rohrquerschnitt:

$$w = \frac{C\,a^2 b^2}{2\nu\,(b^2 + a^2)}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right]. \tag{11 a}$$

Setzt man $a = b$, geht also zum Kreisquerschnitt über, so bekommt man die bekannte parabolische Geschwindigkeitsverteilung für die stationäre Poiseuillesche Strömung im Kreisrohr

$$w = \frac{C}{4\nu}\,(a^2 - r^2), \tag{11 b}$$

was mit dem Ergebnis von Sexl ([1], Seite 355) vollkommen übereinstimmt. Für langsame Schwingungen hat die Geschwindigkeitsverteilung also gleiche Phase wie die erregende Druckverteilung, während die Amplitude parabolisch verteilt ist, wie im stationären Fall.

b) Für sehr schnelle Schwingungen ($\sqrt{\beta/\nu} \cdot \xi_0$ groß, also Rey $\gg 1$) benötigen wir die asymptotische Entwicklung der zugeordneten MATHIEUschen Funktionen. Wir haben in diesem Falle zunächst den Ausdruck ([4], Seite 230)

$$Ce_m(z, q) \sim \frac{C_m}{2^{m-(1/2)}\,\mathfrak{Cof}^{1/2} z} \cos\left[2k\,\mathfrak{Sin}\, z - (2m+1)\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}\,z\right)\right] \tag{12}$$

unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n\, 2^{2n-(1/2)}\, ce_{2n}(0) \cdot ce_{2n}(\pi/2)}{A_0^{(2n)}\,(\pi k)^{1/2}} \tag{13}$$

und

$$Ce_{2n}(z, -q) = (-1)^n\, Ce_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi i + z, q\right) \tag{14}$$

zweckentsprechend umzuformen. Für $m = 0$ bzw. $n = 0$ folgt durch Anwendung der Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen ([6], Seite 10 ff.) nach einigen Umformungen die gesuchte asymptotische Formel:

$$Ce_0(\xi, -k^2) \sim \frac{ce_0(0) \cdot ce_0(\pi/2)}{2\,A_0^{\,0}\,(2\pi k)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,(\xi/2)} \cdot e^{2k\,\mathfrak{Cof}\,\xi}. \tag{15}$$

Demgemäß erhalten wir für die Geschwindigkeitsverteilung den Ausdruck

$$w = -\frac{i\,C}{\beta}\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,(\xi_0/2)}{\mathfrak{Cof}\,(\xi/2)} \cdot e^{-(1+i)\sqrt{(\beta/2\nu)}\,(h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 - h\,\mathfrak{Cof}\,\xi)}\right] e^{i\beta t}, \tag{16}$$

oder, wenn wir wieder nur den reellen Teil nehmen:

$$w = \frac{C}{\beta}\sin\beta t - \frac{C}{\beta}\frac{\mathfrak{Cof}\,(\xi_0/2)}{\mathfrak{Cof}\,(\xi/2)}\, e^{-\sqrt{(\beta/2\nu)}\,(h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 - h\,\mathfrak{Cof}\,\xi)} \cdot$$

$$\cdot \sin\left[\beta t - \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}\,(h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 - h\,\mathfrak{Cof}\,\xi)\right]. \tag{17}$$

Diese Form der Lösung bzw. die vorhergehende in imaginärer Gestalt hätte man auch ohne weiteres durch eine Grenzschichtenbetrachtung im PRANDTLschen Sinn gewinnen können. Denn die Differentialgleichung der PRANDTLschen Grenzschicht lautet in unserem Fall

$$Z = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2},$$

wobei $\zeta = h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 - h\,\mathfrak{Cof}\,\xi$ die Entfernung von der in dieser Näherung als eben zu betrachtenden Rohrwand bedeutet.

Außerhalb der Grenzschicht gilt

$$w_1 = -\frac{i\,C}{\beta}\,e^{i\beta t} \qquad \text{und} \qquad Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = Ce^{i\beta t}.$$

Setzen wir nun $w = w_1 + w_2(\zeta)$ mit $w_2(0) = (i\,C\,\beta)\,e^{i\beta t}$ als Grenzbedingung, so ergibt sich eine Differentialgleichung für w_2 in folgender Gestalt:

$$\frac{i\,\beta}{\nu}\,w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2}\,.$$

Daraus folgt sofort für w_2:

$$w_2 = \frac{i\,C}{\beta}\,e^{-(1+i)\sqrt{(\beta/2\nu)}\,\cdot\,\zeta}.$$

Damit erhalten wir

$$w = w_1 + w_2 = -\frac{i\,C}{\beta}\,\left[1 - e^{-(1+i)\sqrt{(\beta/2\nu)}\,\cdot\,\zeta}\right] e^{i\beta t},$$

oder

$$w = \frac{C}{\beta}\sin\beta t - \frac{C}{\beta}\,e^{-\sqrt{(\beta/2\nu)}\,\zeta}\cdot\sin\left(\beta t - \sqrt{\frac{\beta}{2\nu}}\cdot\zeta\right). \qquad (17\,\mathrm{b})$$

Mit wachsendem Wandabstand klingt also das zweite Glied schnell ab, so daß für größere Wandabstände nur das erste vom Wandabstand unabhängige Glied übrigbleibt. Die Lösung (17) hat also Grenzschichtcharakter. In großem Wandabstand schwingt die Flüssigkeit reibungslos mit einer Phasenverschiebung von einer halben Periode gegenüber der erregenden Kraft.

Entartet die Querschnittsellipse in einen Kreis, so ziehen sich die Brennpunkte auf das gemeinsame Zentrum zweier Kreise mit den Radien a bzw. r zusammen. Man verifiziert leicht, daß in diesem Fall $h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 \to \sqrt{h}\,e^{\xi_0/2}\sqrt{h}\,e^{\xi_0/2} \to a$ und $h\,\mathfrak{Cof}\,\xi \to r$ übergehen. Wegen $\mathfrak{Sin}\,(\xi/2) \sim \mathfrak{Cof}\,(\xi/2) \sim 2\,\mathfrak{Sin}\,(\xi/2)\,\mathfrak{Cof}\,(\xi/2)$ geht $h\,\mathfrak{Cof}\,(\xi_0/2) \to \sqrt{a}$ und $h\,\mathfrak{Cof}\,(\xi/2) \to \sqrt{r}$.

Damit ergibt sich die Formel von Sexl ([1], S. 356)

$$w = -\frac{i\,C}{\beta}\left[1 - \sqrt{\frac{a}{r}}\,e^{-(1+i)\sqrt{(\beta/2\nu)}\,(a-r)}\right] e^{i\beta t},$$

wie es auch sein muß.

Wir danken Herrn Universitätsprofessor Dr. Theodor Sexl für fördernde Diskussionen während des Fortganges dieser Arbeit.

Mathematischer Anhang

a) Die früher angewendete Methode der Transformation der z-Komponente der Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\nabla\,;v_z = Z - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}_z\,p + \frac{\eta}{\varrho}\,\Delta\,\mathfrak{v}_z$$

ist nicht streng, aber einfach und wirkungsvoll. Man erhält aber die vollständige Gleichung auch direkt in den Koordinaten des elliptischen Zylinders, wenn man nach bekannten Sätzen der Vektorrechnung beachtet, daß

$$\mathfrak{v}\,\nabla;\mathfrak{v}_z = \frac{1}{2}\operatorname{grad}_z \mathfrak{v}^2 - (\mathfrak{v}_\xi \operatorname{rot}_\eta \mathfrak{v} - \mathfrak{v}_\eta \operatorname{rot}_\xi \mathfrak{v})$$

und

$$\Delta \mathfrak{v}_z = \operatorname{grad}_z \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{rot}_z \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

(siehe z. B. [7], S. 148) ist. Durch direkte Berechnung dieser Größen bekommt man sogleich, wenn man $\mathfrak{v}_\xi = u$, $\mathfrak{v}_\eta = v$, $\mathfrak{v}_z = w$ setzt:

$$\mathfrak{v}\,\nabla;w = w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta}}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{v}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta}}\frac{\partial w}{\partial \eta}$$

und

$$\Delta w = \frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin^2\eta)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]$$

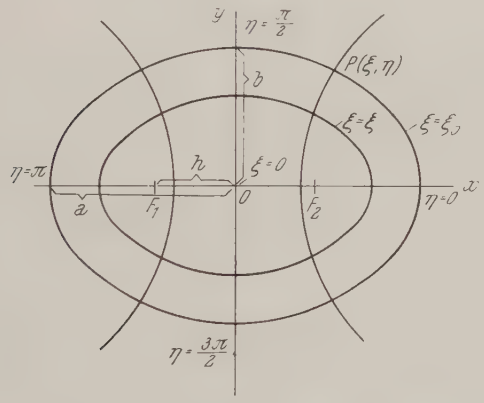

Abb. 1. Schnitt durch den elliptischen Zylinder

Daher lautet die Bewegungsgleichung, wenn $u = v = 0$ und $\partial w/\partial z = 0$ gesetzt wird

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right].$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = \frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta}\cdot u) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta}\,v) + h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta)\frac{\partial w}{\partial z}\right] = 0$$

verschwindet in unserem Fall identisch.

b) Lage und Abmessungen der Querschnittsellipse.

Wir führen elliptische Koordinaten ein mittels der Gleichung

$$(x + i\,y) = h\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta) \tag{1}$$

(h = lineare Exzentrizität).

Diese Koordinaten werden also von Scharen konfokaler Ellipsen, bzw. Hyperbeln

$$\frac{x^2}{h^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\xi} + \frac{y^2}{h^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\xi} = \cos^2\eta + \sin^2\eta = 1 \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{h^2\cos^2\eta} - \frac{y^2}{h^2\sin^2\eta} = \mathfrak{Cof}^2\,\xi - \mathfrak{Sin}^2\,\xi = 1 \tag{3}$$

gebildet. Dann stellt (2) eine Familie von konfokalen Ellipsen mit den großen Achsen $a = h\,\mathfrak{Cof}\,\xi$, den kleinen Achsen $b = h\,\mathfrak{Sin}\,\xi$ dar. Die gemeinsamen Brennpunkte sind die Punkte $x = \pm h$, $y = 0$. Aus der Figur sieht man, daß durch (3) eine Familie von konfokalen Hyperbeln mit denselben Brennpunkten repräsentiert wird. Die Schnittpunkte der Kurven definieren die Koordinaten

$$x = h\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta, \qquad y = h\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta.$$

η geht dabei von 0 bis $2\,\pi$.

Literatur

1. Th. Sexl, Über den von E. G. Richardson entdeckten "Annulareffekt". Z. Phys. **61**, 349–362 (1930).
2. Th. Sexl, Über einige Integrale der für die achsensymmetrischen Strömungen in Rohren charakteristischen Differentialgleichung. Ann. Phys. **87**, 570–580 (1928).
3. E. G. Richardson und E. Tyler, Transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established. Proc. Phys. Soc. London **42**, 1–15 (1929).
4. N. W. McLachlan, Theory and application of Mathieu functions. Oxford: Clarendon Press, 1947.
5. J. Meixner und F. W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1954.
6. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 1. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
7. W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 1. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1943.

On the General Form of the Special Theory of Relativity. III. On the Super-Light Motion in the General Form of the Special Theory of Relativity

By

M. Z. v. Krzywoblocki

Michigan State University, East Lansing, Michigan, USA

(Received May 4, 1960)

Introduction

The author presents some considerations referring to the motion of particles with a velocity greater than the velocity of light in the medium in question. Two transformations of coordinates are applied to reduce the problem to the form equivalent to the form in the classical special theory of relativity. The equations for the relativistic momentum and inertial mass are identical to those obtained in the classical theory of relativity.

1. Previous Results

In his previous papers [Ref. 1, 2] the author of the present paper obtained the following results:

Assume that the reference velocity (in the classical special theory of relativity it is constant and equal to the velocity of light in vacuo) is a variable function of space and time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity u relative to S. The axes are so chosen that the x-axes and the $\{x\ y\}$-planes in the two frames slide along each other. At the origins, let us count time from the instant at which these points momentarily coincide. Let t be the time at which some event happens at a point $\{x, y, z\}$, as measured by the observer on frame S, and let $\{x', y', z', t'\}$ be the coordinates and time of the same event as measured by the observer on S'. The analysis is performed under the assumption that the reference velocity c is a function of the position and time, i.e., $c = c\,(x, y, z, t)$ or $c' = c'\,(x', y', z', t')$. The fundamental requirement of the special theory of relativity, the invariance of the distance between two points in

the four-dimensional space $S\ \{x, y, z, c\,t\}$, or of the corresponding points in S', is:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 = \\ = (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c'^2\,(dt')^2. \tag{1.1}$$

The calculations lead to the following transformation formulas:

$$x = \int c\,(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' + u\int c'\,(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{1.2}$$

$$t = u\int c^{-1}\,(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' + \int c'\,(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{1.3}$$

and

$$x' = \int c'\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dx - u\int c\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dt; \tag{1.4}$$

$$t' = \int c\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dt - u\int c'^{-1}\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}\,dx, \tag{1.5}$$

or

$$x = (c^2 - u^2)^{-1/2}\,(c\,x' + u\,t') - \\ - \int [x'\,d(c(c^2 - u^2)^{-1/2}) + u\,t'\,d(c'(c^2 - u^2)^{-1/2})]; \tag{1.6}$$

$$t = (c^2 - u^2)^{-1/2}\,(u\,x'\,c^{-1} + c'\,t') - \\ - \int [u\,x'\,d(c^{-1}\,(c^2 - u^2)^{-1/2}) + t'\,d(c'\,(c^2 - u^2)^{-1/2})]; \tag{1.7}$$

and applying integration by parts:

$$x' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}\,(c'\,x - u\,c\,t) - \\ - \int [x\,d(c'\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}) - u\,t\,d(c\,(c'^2 - u^2)^{-1/2})]; \tag{1.8}$$

$$t' = (c'^2 - u^2)^{-1/2}\,(c\,t - u\,c'^{-1}\,x) - \\ - \int [t\,d(c\,(c'^2 - u^2)^{-1/2}) - u\,x\,d(c'^{-1}\,(c'^2 - u^2)^{-1/2})]. \tag{1.9}$$

Transformation of velocities are given by the formulas:

$$v_x' = (c'\,c^{-1}\,v_x - u)\,[1 - u\,v_x\,(c'\,c)^{-1}]^{-1}; \tag{1.10}$$

$$v_y' = v_y\,(c'^2 - u^2)^{1/2}\,[c\,(1 - u\,v_x\,(c'\,c)^{-1})]^{-1}; \tag{1.11}$$

$$v_z' = v_z\,(c'^2 - u^2)^{1/2}\,[c\,(1 - u\,v_x\,(c'\,c)^{-1})]^{-1}. \tag{1.12}$$

2. Motion of Particles with Speeds Greater Than That of Light in a Medium

The so-called Čerenkov or Vavilov-Čerenkov effect refers to particles moving in a medium with a velocity, u, which, being smaller than the velocity of light in vacuo, c, is yet greater than the velocity c' of light in that medium. Thus one is confronted with the motion of a particle with a velocity greater than the velocity of light in the medium in

question. This fact immediately suggests another problem. There is a well-known statement in the theoretical physics that no material body, and therefore no particle whatsoever can ever attain the velocity equal to the velocity of light in vacuo and that this fact is one of the basic principles of the theory of relativity. But actually this statement was never proved and consequently presents rather a hypothesis than a fact. The existing proofs that no material particle can attain velocity greater than the velocity of light, are based on the Lorentz transformations. But, actually, the entire approach used in the special theory of relativity is based on the principle of the constancy of the velocity of light and on the assumption that this is the maximum possible velocity attainable in the nature. Obviously, there may arise a doubt in human mind whether this hypothesis is true, since certainly one can imagine a projectile with a propulsive device moving in a vacuum with a velocity greater than the velocity of light in vacuo. Einstein himself wrote (Ref. 3, p. 28) "that the theory of relativity is often criticized for giving, without justification, a central theoretical role to the propagation of light". Two items should be mentioned: first, that there are no strong theoretical indications that the velocity of light in vacuo may be actually the maximum possible attainable velocity in our universe and that in the future the author will attempt to provide more substantial statements in that direction; and second, that in the present paper we shall present theoretical attempt of avoiding the assumption that the velocity of light in vacuo is the maximum possible attainable velocity in the universe.

Assume a certain velocity $C_{\max}$ which is supposed to be the maximum possible velocity a substance can theoretically attain in the universe or which may appear in any physical phenomenon. Theoretically, this velocity may be of any value, even much higher than the velocity of light in vacuo. Its numerical value is unknown, as yet, but this fact does not stop us from performing the theoretical calculations. If all the known velocities of light in various media are less than the velocity of light in vacuo, $C_{\max}$ will be assumed to be equal to the velocity of light in vacuo.

A point in the four-dimensional space $S\{x, y, z, t\}$ is called a world-point and the multiplicity of all system in S is called the world. A curve in the world is called a world-line. The Minkowski [Ref. 4, p. 83] world-postulate permits identical treatment of the four coordinates $\{x, y, z, t\}$. Suppose K is an inertial system; then any other system K' which moves uniformly and without rotation relatively to K, is also an inertial system and the laws of nature are in concordance for all inertial systems (the principle of relativity). Assume two inertial systems: S and S', with S' moving with a uniform translational velocity, u, with respect to S. In the classical theory of relativity a ray of light is a means of measuring the time between two clocks U_m and U_n located at a distance $r_{mn}: t_n = t_m + r_{mn}\, c^{-1}$, c denoting the velocity of light in vacuo. In the present case this task is taken by a signal moving with

the uniform velocity $C_{\max}$. Let a signal move from a point P_1 to another P_2 with the velocity $C_{\max}$. Then the following condition is satisfied:

$$r = C_{\max}\,\Delta t; \qquad \text{or:} \qquad \sum (\Delta x_i)^2 - C_{\max}^2\,(\Delta t)^2 = 0; \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.1}$$

The same motion may be considered relatively to S':

$$\sum (\Delta x_i')^2 - C_{\max}^2\,(\Delta t')^2 = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

These two equations must be mutually consistent with each other with respect to the transformations from S to S' and vice versa. Summarizing, in the classical theory of relativity (sub-light) we require the preservation of the invariance of the expression (c_v = velocity of light in vacuo):

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - c_v^2 (dt)^2, \tag{2.3}$$

whereas in the present case of the sub-, trans-, and super-light relativity we require the preservation of the invariance of the expression:

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 - C_{\max}^2\,(dt)^2. \tag{2.4}$$

In the theory of relativity the vanishing of $(ds)^2$ furnishes the condition that the world-points may be connected by a signal with c_v or $C_{\max}$. Let an event be represented by a point 0 in the four-dimensional space $\{x_i, l\}$, $(i = 1, 2, 3)$, $l = c_v\,t$: then all the events which can be connected to 0 by means of signals are located on the cone $(ds)^2 = 0$ having the vertex at 0. In the classical special theory of relativity, the cone $c_v^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ with apex 0 consists of two parts, one with values $t < 0$, the other with values $t > 0$. The former, the front-cone of 0, consists of all the world-points which send the light to 0, the latter, the back cone of 0 of all the world-points which receive light from 0. The domain bounded by the front cone alone, we may call "before 0", that which is bounded by the back cone alone, "after 0". The hyperboloidal hypersurface, $F = c_v^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $t > 0$, lies after 0. The domain between the cones is filled by the hyperboloidal hypersurfaces $-F = x^2 + y^2 + z^2 - c_v^2\,t^2 = k^2$ for all constant positive values of k (called internal hyperboloids). The vectors in the manifold $\{x, y, z, t\}$ can be divided into time-like vectors with directions from 0 to the sheet $+F = 1$, $t > 0$, and the space-like vectors with directions from 0 to $-F = 1$. The points P enclosed by the conical surface furnish, with 0, time-like vectors. Such intervals represent elements of possible paths of motion, the velocity being less than that of light. If P lies outside of the "light-cone" then $O\,P$ is space-like. By choosing a certain maximum velocity of the propagation of a signal in the universe, $C_{\max}$, we obviously propose a cone of such a volume, that all possible world-lines and world-points will be contained inside the cone belonging to $C_{\max}$. Let S and S' be two inertial systems having the velocities of light c and c', respectively. Then we obtain two light-

cones, belonging to c and c', respectively, both located inside the cone of $C_{\max}$. Our task in the present is to find the transformation formulas between S and S' when the world-points are located arbitrarily inside or outside the light-cones c or c' but, of course, always inside the cone $C_{\max}$. Obviously, this will refer to world-points moving in a medium with the velocities greater than the velocity of light in the medium in question. These world-points are located between the cones $C_{\max}$ and c, say.

One more item will be mentioned. There is the well-known fact in the classical gas-dynamics that when a particle is moving with a velocity greater than that of sound, there appear surfaces of discontinuity, the so-called Mach cones. The ČERENKOV effect is the confirmation of the appearance of the similar phenomenon when a particle moves with a velocity greater than the velocity of light in the medium in question: the radiation is propagated, not in all directions, as in the case of an ordinary light source, but only inside a cone at a definite angle to the direction of motion of electron ($\cos\theta = c\,v^{-1}$, $c < v$). If the electron is stopped after having traversed a certain path, the conical wave continues to propagate in the medium as a free light wave. Thus it seems that the "conical" flow is the most characteristic phenomenon of a motion of a particle in nature in all its aspects. One can introduce the nomenclature: sub-, trans-, super-light regions in the analogy to sub-, trans-, super-sonic regions.

3. Transformation of Coordinates

Below, we shall derive the transformation formulas when the velocity of light in a medium (assumed in the classical theory of relativity to be a constant equal to the velocity of light in vacuo) is a variable function of space location and time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity, u, relative to S. The axes are chosen so that the x-axes and $\{x, y\}$-planes in the two frames slide along each other. At the origins, let us count time from the instant at which these points momentarily coincide. Let t be the time at which some event happens at a point $\{x, y, z\}$ as measured by the observer on frame S, and let $\{x', y', z', t'\}$ be the coordinates and time of the same event as measured by the observer on S'. The analysis is performed under the assumption that the reference velocity c is a function of the position and time, i.e., $c = c\,(x, y, z, t)$ or $c' = c'\,(x', y', z', t')$. As the fundamental requirement of the special theory of relativity we assume the invariance of the distance between two points P_1 and P_2 in S, or between two corresponding points P_1' and P_2' in S'. The velocity of motion, u, may be greater than both c and c'. Thus we assume that in both four-dimensional spaces, $\{x, y, z, t\}$ and $\{x', y', z', t'\}$ the maximum velocity attainable of any sort of signal is $C_{\max}$. This means that one has;

$$(dr)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = C_{\max}^2\,(dt)^2. \tag{3.1}$$

We shall introduce a transformation of coordinates, which is equivalent to the transformation of cones, that of $C_{\max}$ to that of c, i.e.

$$(w\,dx)^2 + (w\,dy)^2 + (w\,dz)^2 = (c\,dt)^2; \qquad w = c\,C_{\max}^{-1}, \tag{3.2}$$

where w may be called the dimensionless reduced velocity of light in S. Introduce new coordinates $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, such that:

$$w\,dx = d\bar{x}; \qquad w\,dy = d\bar{y}; \qquad w\,dz = d\bar{z}; \tag{3.3}$$

and

$$(d\bar{x})^2 + (d\bar{y})^2 + (d\bar{z})^2 = c^2\,(dt)^2. \tag{3.4}$$

Obviously, in the S'-space we have:

$$(dr')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = C_{\max}^2\,(dt')^2; \tag{3.5}$$

$$(d\bar{x}')^2 + (d\bar{y}')^2 + (d\bar{z}')^2 = (c')^2\,(dt')^2; \tag{3.6}$$

$$w'\,dx' = d\bar{x}'; \qquad w'\,dy' = d\bar{y}'; \qquad w'\,dz' = d\bar{z}'; \qquad w' = c'\,C_{\max}^{-1}. \tag{3.7}$$

The fundamental requirement of the special theory of relativity is now expressed in the form of the invariance of the infinitesimal distance:

$$(d\bar{s})^2 = (d\bar{x})^2 + (d\bar{y})^2 + (d\bar{z})^2 - c^2\,(dt)^2 =$$
$$= (d\bar{s}')^2 = (d\bar{x}')^2 + (d\bar{y}')^2 + (d\bar{z}')^2 - c'^2\,(dt')^2. \tag{3.8}$$

It was mentioned above, that the frame S' has a uniform translational velocity, u, relative to S. Consider the equation for $(d\bar{\bar{s}})^2$ written in the form:

$$(d\bar{\bar{s}})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = q^2\,(dt)^2, \tag{3.9}$$

or

$$(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = q^2. \tag{3.10}$$

Assume that the velocity of the frame S' with respect to S, q, is equal to $C_{\max}$. Transforming to the $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$-coordinate system, we see that the relative velocity will be equal to $w\,C_{\max} = c$. This means that in the present case we have to apply the transformation of the velocity u, in the sense:

$$\bar{u} = w\,u; \qquad \text{for} \qquad u = C_{\max}, \qquad \bar{u} = c. \tag{3.11}$$

Let us superimpose upon our system consisting of two frames, S and S', a uniform velocity, $(-\vec{u})$. Then the frame S' is at rest, and the frame S moves with a velocity $(-\vec{u})$ with respect to S'. Consider the equation for $(d\bar{\bar{s}}')^2$ written in the form:

$$(d\bar{\bar{s}}')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 = q'^2\,(dt')^2, \tag{3.12}$$

or

$$(dx'/dt')^2 + (dy'/dt')^2 + (dz'/dt')^2 = q'^2. \tag{3.13}$$

Assume that the velocity of the frame S with respect to S', q', is equal to $C_{\max}$. Transforming to the $\{x', y', z'\}$-coordinate system, we see that the relative velocity will be equal to $w'\,C_{\max} = c'$. This means that

in the present case we have to apply the transformation of the velocity u in the sense:

$$\bar{u} = w'\,u; \qquad \text{for} \qquad u = C_{\max}, \qquad \bar{u} = c'. \tag{3.14}$$

In order to obtain some agreement between the results of Eqs. (3.11) and (3.14) we have to assume that

$$\bar{u} = \bar{w}\,u; \qquad \bar{w} = w \text{ or } w', \text{ whichever is smaller.} \tag{3.15}$$

We require that the characteristic infinitesimal arc, ds, remains invariant under the following group of transformations:

$$\bar{x}' = \alpha\,\bar{x} - \beta\,\bar{u}\,t; \qquad t' = \gamma\,t - \delta\,\bar{u}^{-1}\,\bar{x}, \tag{3.16}$$

with $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, being dimensionless functions of $(w, w'; \bar{u})$, with $\bar{u}$ playing the role of a parameter. An elementary operation yields:

$$\bar{x} = C\,\bar{x}' + B\,\bar{u}\,t'; \qquad t = D\,\bar{u}^{-1}\,\bar{x}' + A\,t', \tag{3.17}$$

with A, B, C, D being dimensionless functions of $(w, w'; u)$. The following relations must be satisfied:

$$A = \alpha\,J^{-1}; \qquad B = \beta\,J^{-1}; \qquad C = \gamma\,J^{-1}; \qquad D = \delta\,J^{-1}; \tag{3.18}$$

$$J = \alpha\,\gamma - \beta\,\delta, \tag{3.19}$$

and the determinant J cannot be equal to zero or infinity. Following the procedure used in the previous papers of the author, we construct the expression:

$$d\bar{x} = K\,d\bar{x}' + \bar{u}\,L\,dt'; \qquad dt = M\,\bar{u}^{-1}\,d\bar{x}' + N\,dt'; \tag{3.20}$$

with $d\bar{y} = d\bar{y}'$, $d\bar{z} = d\bar{z}'$, one gets:

$$\begin{aligned}(d\bar{x})^2 - c^2\,(dt)^2 &= K^2\,(d\bar{x}')^2 + 2\,\bar{u}\,K\,L\,d\bar{x}'\,dt' + \\ &+ \bar{u}^2\,L^2\,(dt')^2 - c^2\,[M^2\,\bar{u}^{-2}\,(d\bar{x}')^2 + 2\,\bar{u}^{-1}\,M\,N\,d\bar{x}'\,dt' + \\ &+ N^2\,(dt')^2] = (d\bar{x}')^2 - c'^2\,(dt')^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Since the variables x' and t' are independent, the coefficients of (dx') and (dt') must vanish separately. This leads to a system of three algebraic equations in four variables:

$$K^2 - c^2\,M^2\,\bar{u}^{-2} - 1 = 0; \tag{3.22}$$

$$\bar{u}\,K\,L - c^2\,\bar{u}^{-1}\,M\,N = 0; \tag{3.23}$$

$$\bar{u}^2\,L^2 - c^2\,N^2 + c'^2 = 0. \tag{3.24}$$

We can assume arbitrarily $L = N$, and obtain:

$$K = c^2\,\bar{u}^{-2}\,M = c\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}; \tag{3.25}$$

$$M = \bar{u}^2\,c^{-1}\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}; \tag{3.26}$$

$$N = L = c'\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}. \tag{3.27}$$

To obtain the transformation formulas we refer directly to the system of equations (3.20):

$$\bar{x} = \int c\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}\,d\bar{x}' + \int \bar{u}\,c'\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{3.28}$$

$$t = \int \bar{u}\,c^{-1}\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}\,d\bar{x}' + \int c'\,(c^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}\,dt'. \tag{3.29}$$

Introducing the $\{x, t\}$- and $\{x', t'\}$-coordinate systems, we have from Eq. (3.20):

$$w\,dx = K\,w'\,dx' + \bar{w}\,u\,L\,dt';$$
$$dt = (u\,\bar{w})^{-1}\,M\,w'\,dx' + N\,dt', \tag{3.30}$$

or:

$$x = \int c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dx' + u\int \bar{w}\,w^{-1}\,c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dt'; \tag{3.31}$$

$$t = u\int c^{-1}\,\bar{w}\,w'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dx' + \int c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dt'. \tag{3.32}$$

To obtain another set of transformation formulas, we apply the above procedure to the system of equations (3.16):

$$d\bar{x}' = P\,d\bar{x} - \bar{u}\,R\,dt; \qquad dt' = T\,dt - \bar{u}^{-1}\,U\,d\bar{x}. \tag{3.33}$$

From the equality:

$$(d\bar{x}')^2 - c'^2\,(dt')^2 = (d\bar{x})^2 - c^2\,(dt)^2, \tag{3.34}$$

we obtain:

$$P^2 - c'^2\,\bar{u}^{-2}\,U^2 - 1 = 0; \tag{3.35}$$
$$\bar{u}\,P\,R - c'^2\,\bar{u}^{-1}\,T\,U = 0; \tag{3.36}$$
$$\bar{u}^2\,R^2 - c'^2\,T^2 + c^2 = 0. \tag{3.37}$$

With $R = T$ one gets:

$$P = c'^2\,\bar{u}^{-2}\,U = c'\,(c'^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}; \tag{3.38}$$
$$U = \bar{u}^2\,c'^{-1}\,(c'^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}; \tag{3.39}$$
$$R = T = c\,(c'^2 - \bar{u}^2)^{-1/2}. \tag{3.40}$$

To obtain the transformation formulas, we refer directly to the system of equations (3.33):

$$x' = C_{\max}\int w\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dx - u\int \bar{w}\,w'^{-1}\,c\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dt; \tag{3.41}$$

$$t' = \int c\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dt - u\int \bar{w}\,w\,c'^{-1}\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}\,dx. \tag{3.42}$$

Integration by parts furnishes:

$$x = (c'\,x' + u\,\bar{w}\,w^{-1}\,c'\,t')\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2} -$$
$$- \int [x'\,d(c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}) + u\,t'\,d(\bar{w}\,w^{-1}\,c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2})]; \tag{3.43}$$

$$t = (u\,c^{-1}\,\bar{w}\,w'\,x' + c'\,t')\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2} -$$
$$- \int [x'\,u\,d(c^{-1}\,\bar{w}\,w'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}) + t'\,d(c'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2})]; \tag{3.44}$$

$$x' = (C_{\max} w\, x - u\, \bar{w}\, w'^{-1} c\, t)\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2} -$$
$$- \int [C_{\max} x\, d(w\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}) - u\, t\, d(\bar{w}\, w'^{-1} c\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2})]; \tag{3.45}$$

$$t' = (c\, t - u\, \bar{w}\, w\, c'^{-1} x)\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2} -$$
$$- \int [t\, d(c\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}) - u\, x\, d(\bar{w}\, w\, c'^{-1}\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2})]. \tag{3.46}$$

Moreover, there are transformation equations, connecting the two other coordinates:

$$w\, dy = w'\, dy'; \qquad y = \int w^{-1} w'\, dy'; \qquad y' = \int w\, w'^{-1}\, dy; \tag{3.47}$$

$$w\, dz = w'\, dz'; \qquad z = \int w^{-1} w'\, dz'; \qquad z' = \int w\, w'^{-1}\, dz, \tag{3.48}$$

with the addition of the possible constants of integration.

4. Contraction in Space and Time

These two well-known notions in the special theory of relativity take the following forms:

(a) Contraction in space at the same time:

$$L = x_2 - x_1; \qquad L_0 = x_2' - x_1'; \tag{4.1}$$

using Eqs. (3.45) one obtains:

$$L_0 = C_{\max} w\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2} L - \int C_{\max} L\, d(w\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}); \tag{4.2}$$

a differentiation and integration of Eq. (4.2) furnishes:

$$L = C_{\max}^{-1} w^{-1}\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{1/2} L_0 - C_{\max}^{-1} \int L_0\, d(w^{-1}\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{1/2}); \tag{4.3}$$

(b) Contraction in time:

$$T = t_2 - t_1; \qquad T_0 = t_2' - t_1'; \tag{4.4}$$

$$T_0 = c\, T\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2} - \int T\, d(c\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}); \tag{4.5}$$

$$T = c^{-1} T_0\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{1/2} - \int T_0\, d(c^{-1}\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{1/2}). \tag{4.6}$$

5. Transformation of Velocities

Using Eqs. (3.41) and (3.42) one gets:

$$dx' = (C_{\max} w\, dx - u\, \bar{w}\, w'^{-1} c\, dt)\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}.; \tag{5.1}$$

$$dt' = (-u\, \bar{w}\, w\, c'^{-1} dx + c\, dt)\,(c'^2 - \bar{w}^2 u^2)^{-1/2}. \tag{5.2}$$

This leads to (with $dx'/dt' = v_x'$; $dy'/dt' = v_y'$, etc.):

$$v_x' = (v_x - u\,\bar{w}\,w'^{-1})\,(1 - u\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,c'^{-1}\,v_x)^{-1}; \tag{5.3}$$

$$v_y' = c'^{-1}\,v_y\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{1/2}\,(1 - u\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,c'^{-1}\,v_x)^{-1}; \tag{5.4}$$

$$v_z' = c'^{-1}\,v_z\,(c'^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{1/2}\,(1 - u\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,c'^{-1}\,v_x)^{-1}. \tag{5.5}$$

Let us construct the square of the velocity $v'^2 = v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2$ and let $v = C_{\max}$ or $v_y^2 + v_z^2 = C_{\max}^2 - v_x^2$. This gives the result: $v' = C_{\max}$, which is correct. Similarly, Eqs. (3.31) and (3.32) give:

$$dx = (c'\,dx' + u\,\bar{w}\,w^{-1}\,c'\,dt')\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}; \tag{5.6}$$

$$dt = (u\,c^{-1}\,\bar{w}\,w'\,dx' + c'\,dt')\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{-1/2}. \tag{5.7}$$

With $dx/dt = v_x$, $dy/dt = v_y$, etc., this leads to:

$$v_x = (v_x' + u\,\bar{w}\,w^{-1})\,(1 + u\,c^{-1}\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,v_x')^{-1}; \tag{5.8}$$

$$v_y = w^{-1}\,C_{\max}^{-1}\,v_y'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{1/2}\,(1 + u\,c^{-1}\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,v_x')^{-1}; \tag{5.9}$$

$$v_z = w^{-1}\,C_{\max}^{-1}\,v_z'\,(c^2 - \bar{w}^2\,u^2)^{1/2}\,(1 + u\,c^{-1}\,\bar{w}\,C_{\max}^{-1}\,v_x')^{-1}. \tag{5.10}$$

Let us construct the square of the velocity $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ and let $v' = C_{\max}$ or $v_y'^2 + v_z'^2 = C_{\max}^2 - v_x'^2$. This gives the result $v = C_{\max}$, which is correct.

6. Mechanics of Mass Points

Suppose two mass points of equal mass m approach the origin of the coordinate system S from opposite directions and reach it at the time $t = 0$. The magnitudes of their respective velocity components are:

$$u_x^{(1)} = a = -\,u_x^{(2)}; \qquad u_y^{(1)} = b = -\,u_y^{(2)}; \qquad u_z^{(1)} = 0 = u_z^{(2)}. \tag{6.1}$$

This implies that their equations of motion before the collision are:

$$x^{(1)} = a\,t = -\,x^{(2)}; \qquad y^{(1)} = b\,t = -\,y^{(2)}; \qquad z^{(1)} = z^{(2)} = 0. \tag{6.2}$$

Suppose that upon colliding, they preserve their respective motions in the x-direction and exchange their velocities in the y-direction. This implies that after the collision their velocities are:

$$\bar{u}_x^{(1)} = a = -\,\bar{u}_x^{(2)}; \qquad \bar{u}_y^{(1)} = -\,b = -\,\bar{u}_y^{(2)}; \qquad \bar{u}_z^{(1)} = \bar{u}_z^{(2)} = 0, \tag{6.3}$$

with the corresponding equations of motion:

$$\bar{x}^{(1)} = a\,t = -\,\bar{x}^{(2)}; \qquad \bar{y}^{(1)} = -\,b\,t = -\,\bar{y}^{(2)}; \qquad \bar{z}^{(1)} = 0 = \bar{z}^{(2)}. \tag{6.4}$$

The velocities of the two particles are obviously the same before and after the collision and equal to each other.

Suppose we investigate the behavior of the two particles in terms of a new coordinate system S', which is connected with the original system, S, by Eqs. (3.31), (3.32), and (3.41), (3.42). Due to the conditions in the system in question, it seems justified to assume $c' \equiv c$. We also

assume $u = a$, and c independent of time t. Upon transforming Eqs. (6.2), we obtain the equations of motion before the collision:

$$x^{(1)\prime} = 0; \qquad x^{(2)\prime} = -2\,a\,t'\,(1 + a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1}; \tag{6.5}$$

$$y^{(1)\prime} = b\,t'\,(1 - a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1/2};$$

$$y^{(2)\prime} = -(1 - a^2\,C_{\max}^{-2})^{1/2}\,b\,t'\,(1 + a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1}; \tag{6.6}$$

after the collision one gets:

$$\bar{x}^{(1)\prime} = 0; \qquad \bar{x}^{(2)\prime} = -2\,a\,t'\,(1 + a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1}; \tag{6.7}$$

$$\bar{y}^{(1)\prime} = -b\,t'\,(1 - a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1/2};$$

$$\bar{y}^{(2)\prime} = (1 - a^2\,C_{\max}^{-2})^{1/2}\,b\,t'\,(1 + a^2\,C_{\max}^{-2})^{-1}. \tag{6.8}$$

Eqs. (6.5) to (6.8) are identical in form to the corresponding equations in the classical special theory of relativity, with one exception, namely, with $C_{\max}$ taking place of the velocity of light in vacuo. Consequently, all the remaining equations, derived from the above equations, remain the same with $C_{\max}$ taking place of c in vacuo. In particular, the relativistic momentum has the form:

$$p = m_0\,v\,(1 - v^2/C_{\max}^2)^{-1/2}, \qquad v = \text{velocity}; \tag{6.9}$$

the inertial mass:

$$m = m_0\,(1 - v^2/C_{\max}^2)^{-1/2}. \tag{6.10}$$

In the above reasoning there is missing one proof, namely, that $C_{\max} = c$ in vacuo or $\neq c$. The results of certain considerations on that subject will be communicated in the future.

References

1. Krzywoblocki, v., M. Z.: On the General Form of the Special Theory of Relativity. Acta Physica Austriaca. (To be published).
2. Krzywoblocki, v., M. Z.: On the General Form of the Special Theory of Relativity II. Acta Physica Austriaca. (To be published).
3. Einstein, A.: The Meaning of Relativity. 5th Edition. Princeton University Press, 1955, Princeton, N. J.
4. Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., and Weyl, H.: The Principle of Relativity. Methuen and Co. Ltd. London, 1923.
5. Weyl, H.: Raum-Zeit-Materie. 5th Edition, Berlin, Springer-Verlag, 1923

Über die direkte Beobachtung der Lorentzkontraktion

Von

Julius Ranninger

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 6 Abbildungen

(*Eingegangen am 6. Mai 1960*)

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die LORENTZkontraktion unmittelbar sichtbar gemacht werden kann und welche einschränkenden Bedingungen für ein solches Experiment gefordert werden müssen, um nicht zu widerspruchsvollen Resultaten zu gelangen.

I. Einleitung

Seit 1905, als A. EINSTEIN seine spezielle Relativitätstheorie postulierte, konnten zahlreiche indirekte Methoden zur experimentellen Messung der Lorentzkontraktion angegeben werden. Anders steht es mit der unmittelbaren Sichtbarmachung von solchen relativistischen Effekten. Wie eine Arbeit aus "The Physical Review" (116, 4, p. 1041) "Invisibility of Lorentz-Contraction" zeigt, ist man sich noch nicht im klaren, ob solche Effekte unmittelbar sichtbar gemacht werden können oder nicht. In dieser Arbeit wurden grobe Vernachlässigungen gemacht, die wegen der hier auftretenden v/c Effekte nicht zulässig sind. Diese v/c Effekte sind rein klassischen Ursprungs und rühren von den verschieden langen Wegen, die das Licht von den Enden des Gegenstandes zum relativ zu ihm bewegten Registrierungsgerät durchlaufen muß. Innerhalb der Zeitdifferenz, die das Licht zum Durchlaufen dieser Strecken braucht, bewegt sich der Gegenstand weiter, was seine scheinbare Größe verändert. Erst im Falle der Symmetrie der Lichtwege gelangt man zu $(v/c)^2$ Effekten, die der Lorentzkontraktion entsprechen. Dieses Verhalten zeigt auch der relativistische DOPPLEREFFEKT. Während beim longitudinalen DOPPLEREffekt v/c Terme plus $(v/c)^2$ Korrekturen auftreten, scheinen beim transversalen nur $(v/c)^2$ Terme auf, die der Zeitdilatation entsprechen. Man muß daher bei der Photographie der LORENTZkontraktion dieselbe Vorsicht walten lassen, die man auch bei der Beobachtung der Zeitdilatation durch den DOPPLEREffekt braucht.

Weiters war die Fragestellung in dieser Arbeit zu kompliziert, da als Versuchsobjekt, an dem eine Lorentzkontraktion festgestellt werden sollte, eine Kugel genommen wurde. Um zu einer folgerichtigen Antwort zu gelangen, betrachten wir in unserer Behandlung anstatt der Kugel einen Meterstab, bei dem die Dicke gegen seine Länge vernachlässigt werden kann. Weiter wurde in der oben erwähnten Arbeit zur photographischen Aufnahme eine kugelförmige Platte verwendet, was, wie wir später erläutern werden, ebenfalls unzulässig ist.

II. Photographische Messung der Lorentzkontraktion

Betrachten wir einen Meterstab, der sich parallel zu seiner Längsrichtung mit großer Geschwindigkeit bewegt. Einem ruhenden Beobachter wird er lorentzkontrahiert erscheinen, wobei sich diese Verkürzung unmittelbar aus den Lorentztransformationen

$$x' = (x - v\,t)/(1 - \beta^2)^{1/2} \qquad \beta = v/c$$

zu

$$x_1' - x_2' = (x_1 - x_2)\,(1 - \beta^2)^{1/2}$$

ergibt, wenn x_1 bzw. x_2 Anfangs- und Endpunkt im ruhenden System bedeutet. x_1' und x_2' haben dieselbe Bedeutung im bewegten System.

Diese Kontraktion des bewegten Meterstabes kann durch folgendes Experiment sichtbar gemacht werden: Ein System S' in dem der Beobachter O' relativ zum Meterstab ruht, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zur Längsrichtung des Meterstabes im System S, in dessen Ursprung der Beobachter O ruht. Zur Zeit $t = t' = 0$ sollen sich die beiden Beobachter (Koordinatennullpunkte) decken und mit ihren Photoapparaten Aufnahmen vom Maßstab, der relativ zu O' ruht zu O aber mit der Geschwindigkeit v bewegt ist, machen. Als Photoapparat nehmen wir eine einfache Lochkamera, in der der Film im Abstand r vom Loch der Kamera parallel zur unteren Fläche des Meterstabes eingespannt ist. Weiter setzen wir die Möglichkeit einer unendlich kurzen Belichtungszeit voraus.

Diskutieren wir zunächst den Fall, daß O ruht, O' und der Meterstab sich aber mit der Geschwindigkeit v relativ zu O bewegen (Abb. 1). Da nur solche Punkte des Meterstabes photographiert werden von welchen das abgestrahlte Licht im Loch der Kamera von O gleichzeitig eintrifft, ergibt sich die Bedingung

$$s = |l_2 - l_1|\, v/c. \tag{1}$$

s bedeutet dabei die Strecke, die der Meterstab in der Zeitdifferenz zurücklegt, die das Licht zum Durchlaufen von l_1 und l_2 braucht. Mit Hilfe des cos-Satzes

$$l_2^2 = l_1^2 + G^2 - 2\,l_1 G \cos\vartheta$$

erhalten wir unter Voraussetzung $l_1 \sim l_2 \gg G$

$$l_2 - l_1 = -\,G\cos\vartheta \tag{2}$$

und aus (1) und (2)

$$G = g' (1 \pm \beta \cos \varphi)^{-1}. \tag{3}$$

+ oder − je nachdem sich der Meterstab von links nach rechts oder in umgekehrter Richtung bewegt. Dabei haben wir $G = g - s$ gesetzt, falls sich der Meterstab von links nach rechts bewegt und noch links von O befindet oder von rechts nach links bewegt und noch rechts von O befindet. $G = g - s$ gilt in den entsprechenden 2 anderen Fällen. Aus (1) und (3) erhalten wir die Bildgröße in O

$$B = g\, r/h\, (1 - \beta^2)^{1/2} (1 \pm \beta \cos \varphi)^{-1} \tag{4}$$

wenn $g' = g\,(1 - \beta^2)^{1/2}$ die Länge des bewegten Meterstabes im ruhenden System von O bedeutet.

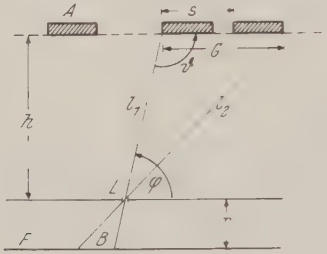

Abb. 1. Der ruhende Beobachter O macht von einem von rechts nach links fliegenden Meterstab eine Aufnahme
A Lage des Meterstabes zur Zeit der Aufnahme $t = t' = 0$
L Loch der Kamera O
F ruhender Film von O
B Bild des vorbeifliegenden Meterstabes

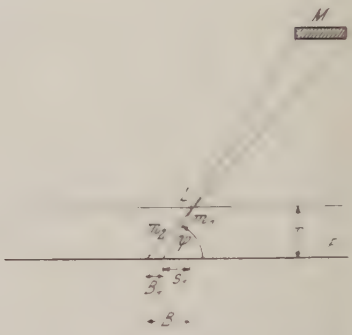

Abb. 2. Der mit der Geschwindigkeit v von links nach rechts bewegte Beobachter O' macht vom ruhenden Meterstab eine Aufnahme
M ruhender Meterstab
L Loch der Kamera von O'
F Film von O'

Das Bild eines von rechts kommenden Meterstabes wird von O aus betrachtet immer kleiner und erreicht, wenn es symmetrisch zum Loch der Kamera liegt

$$(l_1 = l_2, \cos \varphi = 0) \text{ die Größe } B = g\, r/h\, (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Der bewegte Beobachter erhält die Bildgröße $B' = g\, r\, h$ und es ist somit eine LORENTZkontraktion feststellbar:

$$B/B' = (1 - \beta^2)^{1/2}$$

Bewegt sich der Meterstab weiter nach links, so wird das Bild immer kleiner. Da das Bild in O kontinuierlich alle Größen durchläuft, gibt es eine bestimmte Lage des Meterstabes zu O derart, daß die Bilder in O und O' gleich sind. Diese Lage ergibt sich aus der Bedingung $B = B'$. Setzt man die vorhin erhaltenen Resultate ein, so folgt

$$(1 - \beta^2)^{1/2} = 1 \pm \beta \cos \varphi \tag{5}$$

Aus (5) erhält man sofort das gesuchte q, das die Lage des Meterstabes zu O bestimmt, für die keine LORENTZkontraktion festgestellt werden kann.

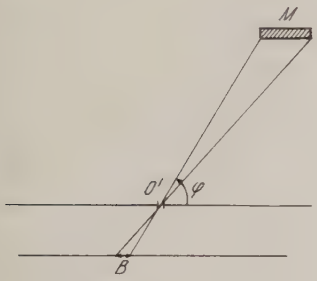

Abb. 3. Bewegtes System von O'. M ruht relativ zu O'
B Bild des Meterstabes von O' aus

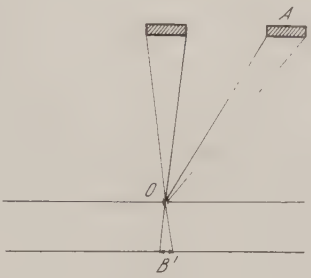

Abb. 4. Ruhendes System von O
B Bild des vorbeifliegenden Lorentzkontrahierten Meterstabes
A Lage des Meterstabes zur Zeit der Aufnahme $t = t' = 0$

Betrachten wir als nächstes den Fall, daß O und der Meterstab ruhen, O' sich aber mit der Geschwindigkeit v dem Beobachter O nähert. (Abb. 2). Beide, O und O' machen wieder zur Zeit $t = t' = 0$ Aufnahmen vom Meterstab. Aus der Bedingung für die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes erhalten wir die Beziehung

$$s_1 = |m_2 - m_1|\, v/c \tag{6}$$

wobei s_1, wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, die Strecke bedeutet, die der Film in der Zeitdifferenz zurücklegt, die das Licht zum Durchlaufen von m_1 und m_2 braucht. Mit Hilfe des cos-Satzes

$$m_2 = m_1 (1 + B_1{}^2/m_1{}^2 + 2\, B_1 \cos \psi/m_1)^{1/2}$$

und der Näherung $m_1 \sim m_2 \gg B_1$ ergibt sich

$$m_2 - m_1 = B_1 \cos \psi \tag{7}$$

B_1 bedeutet das Bild des kontrahierten Meterstabes auf einem zu O ruhenden Film. Aus (6) und (7) ergibt sich, je nachdem ob sich O' von links nach rechts bewegt oder umgekehrt

$$B = B_1 (1 \pm v \cos \psi/c) = g\, r/h\, (1 \pm v \cos \psi/c)\, (1 - \beta^2)^{1/2} \tag{8}$$

Bewegt sich die Kamera des Beobachters O' von links nach rechts, so nimmt die Größe des Bildes kontinuierlich ab. Für den Fall $m_1 = m_2$ (das Bild liegt symmetrisch zum Loch der Kamera) ist $\cos \psi = 0$ und $B = g\, r/h\, (1 - \beta^2)^{1/2}$. O hingegen mißt die Bildgröße $B' = g\, r/h$ und die LORENTZkontraktion wird unmittelbar sichtbar

$$B = B' (1 - \beta^2)^{1/2} \tag{9}$$

Bewegt sich O' weiter nach rechts, so nimmt die Bildgröße immer mehr ab. Es wird daher wie im oben besprochenen Fall eine Lage von O' zu O derart geben, daß beide Beobachter dasselbe Bild erhalten.

Diese Position erhalten wir aus der Bedingung $B' = B$ oder die entsprechenden Ausdrücke eingesetzt

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 \pm \beta \cos \psi. \tag{10}$$

Aus (10) läßt sich ψ berechnen und somit die Lage von O zu O' bestimmen, bei der keine LORENTZkontraktion feststellbar ist.

Folgerungen

Um die LORENTZkontraktion eines bewegten Maßstabes direkt sichtbar zu machen, muß der Meterstab in dem Augenblick photographiert werden, so daß das Bild symmetrisch zum Loch der Kamera erscheint. Dies kann praktisch dadurch erreicht werden, daß man einen Film normal zur Bewegungsrichtung des Meterstabes ablaufen läßt und das Loch der Kamera in sehr kurzen periodischen Abständen öffnet. Das Bild des Meterstabes wird dann im Laufe der Zeit von einer Seite des Films zur anderen laufen, wobei sich die Größe des Bildes fast stetig ändert. Wir müssen das Bild betrachten, das symmetrisch zur Mittellinie des Films liegt. Das ist das Bild des lorentzkontrahierten Meterstabes. (Abb. 5). Bei ruhendem Meterstab und bewegtem Film verfährt man ganz analog. Der Grund warum man die Fälle ausschließen muß, wenn das Bild nicht symmetrisch zum Loch der Kamera erscheint, liegt darin: Es wird nicht die wirkliche Größe des Meterstabes photographiert, sondern der Meterstab in zwei verschiedenen Lagen. Daher ist es auch nicht möglich ein so erhaltenes Bild mit dem eines relativ zum Meterstab ruhenden Beobachters zu vergleichen, da das letztere die tatsächliche Größe des Meterstabes wiedergibt.

III. Einschränkende Bedingungen für die photographische Aufnahme von lorentzkontrahierten Gegenständen

Betrachten wir anstatt der ebenen Filme kugelförmige, die O bzw. O' im Abstand r umgeben, so kommen wir zu einem, den vorangehenden Überlegungen, widersprechenden Ergebnis. Wir diskutieren dies in dem einfachen Fall durch, wo O ruht, O' und der Meterstab sich bewegen. Weiters soll in einem solchen Augenblick photographiert werden, so daß das Bild in O symmetrisch zum Loch der Kamera erscheint. Unter der Voraussetzung $g \sim g' \gg h$ ergibt sich, daß O und O' dasselbe Bild erhalten. Bei ebenem Film hatten wir unter diesen Bedingungen und nur unter diesen eine LORENTZkontraktion feststellen können. Worin liegt nun diese Diskrepanz?

Um zwei Bilder, die einen Gegenstand in verschiedenen Positionen zeigen, vergleichen zu können dürfen sie nicht verzerrt erscheinen. D. h. zwei beliebige Punkte konstanten Abstandes auf einer Geraden parallel zur Längsachse des Meterstabes müssen wieder auf zwei Punkte konstanten Abstandes abgebildet werden. Dies ist bei der Abbildung auf eine Kugel nicht der Fall, wie Abb. 6 zeigt. Es folgt aus Ähnlichkeitsbetrachtungen $T/t = B/b \neq K/k$. Dabei zeigt sich, daß K/k vom Winkel, unter dem die Punkte der Geraden m erscheinen, abhängt.

Somit ist eine kugelförmige Platte zur Sichtbarmachung der Lorentzkontraktion ungeeignet.

Bei dem hier besprochenen photographischen Nachweis der Lorentzkontraktion eines Meterstabes konnten wir unsere Betrachtungen im wesentlichen auf eine Dimension beschränken, denn es wurde einzig und allein die Länge des Meterstabes kontrahiert. Schon beim einfachsten dreidimensionalen Gebilde, der Kugel, führen analoge Rechnungen wie vorhin auf unüberwindbare Hindernisse. Denn, wie wir oben zwei verschiedene Lagen des Meterstabes berücksichtigen mußten, hätten wir jetzt zwei verschiedene Lagen von Ellipsoiden zu betrachten. Dazu kommt aber jetzt noch die Schwierigkeit die Konturpunkte der Ellipsoide zu bestimmen, die gerade noch abgebildet werden. Die exakte Durchrechnung dieses Problems führt auf unübersichtliche Ergebnisse aus denen über die Sichtbarmachung der Lorentzkontraktion nichts ausgesagt werden kann. In der Arbeit aus "The Physical Review" wurden die oben angeführten Bedingungen größtenteils nicht berücksichtigt und man gelangte daher zur Annahme, daß die Lorentzkontraktion nicht sichtbar gemacht werden könne.

Bei allen unseren Überlegungen hatten wir zur Voraussetzung gemacht, daß die Maßsysteme, mit denen die Bilder des ruhenden und bewegten Beobachters gemessen werden, völlig gleich sind. Das heißt, zwei zur Zeit $t = t' = -\infty$ identische Maßstäbe ändern sich nicht, wenn sie genügend langsam auf die Geschwindigkeit v relativ zueinander beschleunigt werden.

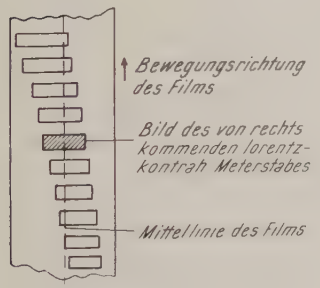

Abb. 5

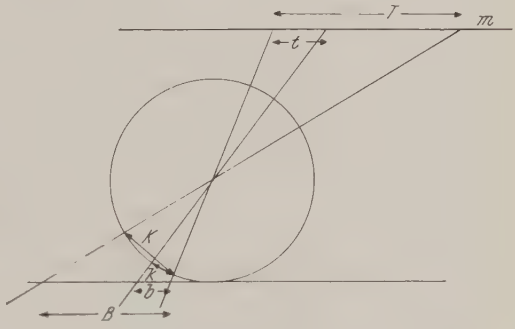

Abb. 6

Herrn Prof. Dr. Walter Thirring danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Zur Temperaturabhängigkeit der Exoelektronenemission*

Von

H. Birgfellner und H. Müller

II. Physikalisches Institut der Universität Wien

Mit 4 Abbildungen

(*Eingegangen am 15. Juli 1960*)

H. Hieslmair und H. Müller [1] fanden überraschenderweise, daß die Exoelektronenglowkurven aller von ihnen untersuchten Metalle (Al, Fe, Cu...) innerhalb der Meßgenauigkeit in der Temperatur der Maxima übereinstimmen, vorausgesetzt, daß die Aufheizgeschwindigkeit für alle Messungen gleich ist[1]. Da die Temperatur der Maxima nur mit einer Genauigkeit von $\pm 7^\circ$ C bestimmt werden konnte, besteht die Möglichkeit, daß eventuell doch vorhandene kleine, jedoch für das betreffende Metall charakteristische Unterschiede in der Lage der Glowkurvenmaxima nicht erfaßt wurden.

Zweck der vorliegenden Arbeit war zunächst die Überprüfung der von H. Hieslmair und H. Müller erhaltenen Resultate mit einer verbesserten, eine größere Meßgenauigkeit gestattenden Apparatur. Darüber hinaus sollte die Abhängigkeit der Lage der Emissionsmaxima von der Aufheizgeschwindigkeit untersucht und die den einzelnen Maxima entsprechende thermische Aktivierungsenergie berechnet werden.

Untersucht wurden Kupfer, Zink, Aluminium und Eisen. Maßgebend für die Auswahl dieser vier Metalle war, daß ihre Elektronenglowkurven intensive, stark ausgeprägte Maxima aufweisen, und die Metalle verschiedenen Gruppen im periodischen System angehören. Die Meßtechnik war die gleiche wie in [1]. Die Anregung der Proben erfolgte mit Röntgenlicht (Cu-Strahlung, ungefiltert, 20 mA, 30 kV, direkt vor dem Fenster der Röhre, 5 min), die Elektronenemission wurde mit einem aufheizbaren Geiger-Müller-Zähler gemessen. Eine Vergrößerung der Meßgenauigkeit wurde durch kleinere Meßintervalle (7,5 sec), sorgfältigste Temperaturbestimmung und Mittelung über mehrere, unter gleichen Bedingungen gemachte Messungen erreicht. Die

* Vorgetragen auf der Herbsttagung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft in Leoben 1958. (Physikal. Verhandl. 9, 261, 1958.)

[1] Zu dem gleichen Ergebnis führte eine nach Abschluß vorliegender Arbeit veröffentlichte Untersuchung von A. Vogel [2].

Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur der Emissionsmaxima konnte so auf $\pm 2°$ C reduziert werden.

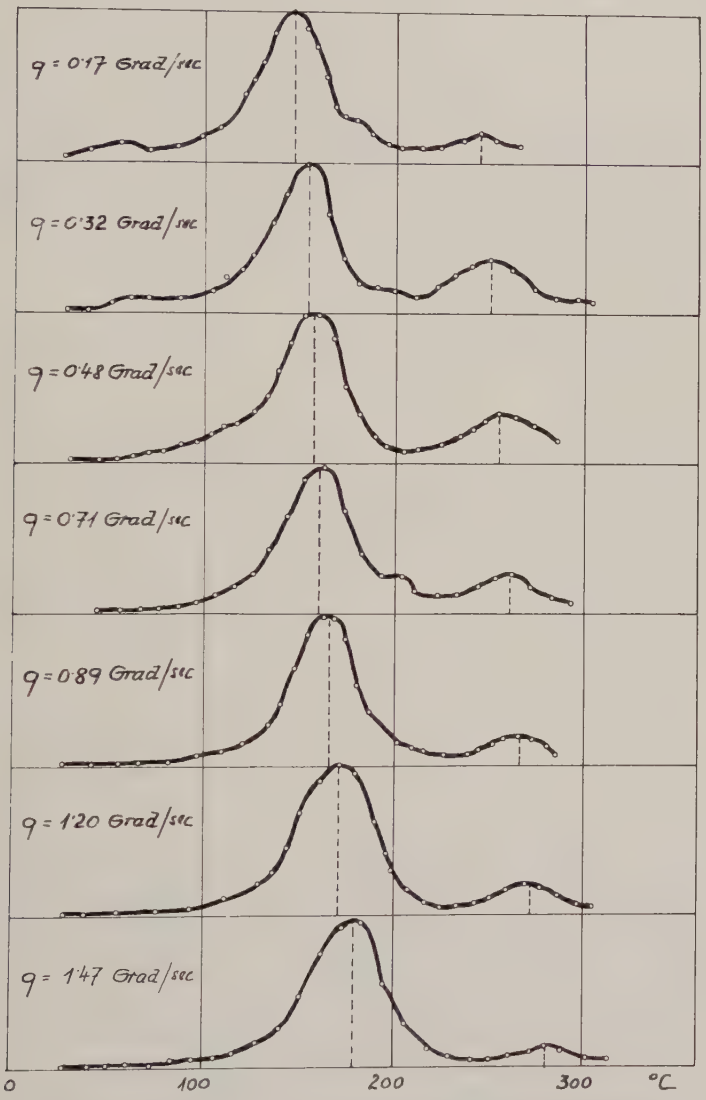

Abb. 1. Glowkurven von Cu bei verschiedenen Aufheizgeschwindigkeiten

Es zeigte sich, daß die Lagen einander entsprechender Glowkurvenmaxima von Metall zu Metall Schwankungen aufwiesen, die nicht mehr innerhalb der Fehlergrenzen der Messung lagen; andererseits streute

aber die Lage der Maxima in der gleichen Größenordnung auch bei Proben gleichen Materials, welche aus ein und demselben Blech geschnitten worden waren. Einer exakten Bestimmung der Lage der Maxima in der Glowkurve war also nicht aus meßtechnischen, sondern aus strukturellen Gründen eine Grenze gesetzt. Die Emission von Exoelektronen ist offenbar so strukturempfindlich, daß schon geringfügige lokale Unterschiede in der Oberflächenstruktur der Probe zu merklichen Verschiebungen im Glowkurvenverlauf führen können.

In Abb. 1 wird am Beispiele des Kupfers die Veränderung der Glowkurve als Funktion der Aufheizgeschwindigkeit gezeigt. Von den von H. Hieslmair und H. Müller bei Metallen und Metalloxyden gefundenen Glowkurvenmaxima treten jene bei 160° C und 260° C immer mit so großer Intensität auf, daß sie einer Auswertung zugänglich sind.

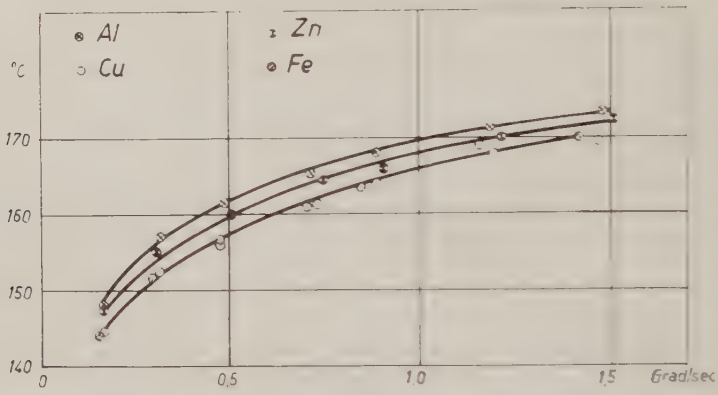

Abb. 2. Abhängigkeit der Lage des „160°-Maximums" von der Aufheizgeschwindigkeit

Die Lage dieser beiden Maxima als Funktion der Aufheizgeschwindigkeit ($q - T_m$-Kurven) ist in Abb. 2 und in Abb. 3 dargestellt. Die in den Diagrammen eingetragenen Meßpunkte sind Mittelwerte aus einer größeren Anzahl von Einzelmessungen. Der Kurvenverlauf ist annähernd logarithmisch. Im Bereiche kleiner Aufheizgeschwindigkeiten ($< 0{,}5$ grad/sec) ist die Steigung der Kurven besonders groß. Messungen bei Aufheizgeschwindigkeiten $< 0{,}2$ grad/sec waren nicht mehr möglich, da mit abnehmender Aufheizgeschwindigkeit zunehmende Verflachung der Maxima eine hinreichend exakte Bestimmung ihrer Lage verhinderte.

Obwohl — wie schon erwähnt — die Einzelmessungen für ein bestimmtes Glowkurvenmaximum stark streuten, liegen die Mittelwerte der Temperatur der Maxima bemerkenswert gut auf glatten Kurven, die jeweils geringfügig in der Reihenfolge Fe-Cu-Zn-Al zu höheren Temperaturen verschoben sind.

Bei Metallen wird die Exoelektronenemission von der immer vorhandenen nichtmetallischen Oberflächendeckschicht verursacht. Zahl-

reiche Untersuchungen haben gezeigt, daß zwischen der Lumineszenz und der Emission von Exoelektronen weitgehende Analogie besteht. In manchen Fällen sind dieselben Haftstellen sowohl für die Emission der Lumineszenzstrahlung als auch für die Emission von Exoelektronen verantwortlich. Es ist daher naheliegend, bei der theoretischen Behandlung der Exoelektronenemission auch die für den Lumineszenzmechanismus bereits entwickelten Ableitungen [3, 4] weitgehend zu übernehmen. Man weiß allerdings noch nicht mit Sicherheit, ob die Exoelektronen direkt von oberflächennahen Haftstellen emittiert werden oder ob sie von der Haftstelle zunächst ins Leitfähigkeitsband

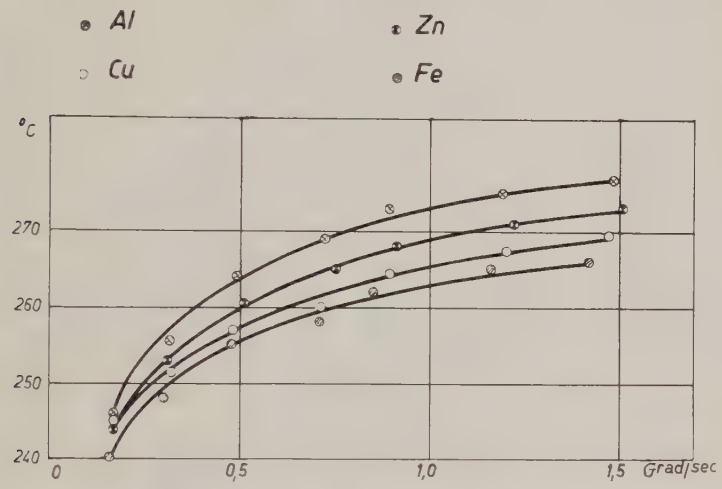

Abb. 3. Abhängigkeit der Lage des „260°-Maximums" von der Aufheizgeschwindigkeit

wandern und erst von dort austreten. Im letzteren Fall muß man die Möglichkeit einer Rekombination der Elektronen mit Akzeptoren bzw. mit Haftstellen in der theoretischen Behandlung des Emissionsvorganges berücksichtigen.

Man erhält für die Abhängigkeit der Temperatur des Glowkurvenmaximums von der Aufheizgeschwindigkeit und der Aktivierungsenergie der Haftstelle die Gleichung

$$\frac{E}{k\,T_m^2} = \frac{1}{q} \cdot s \cdot \exp\left[-\frac{E}{k\,T_m}\right] \tag{I}$$

für den Fall, daß die Elektronen direkt aus der Haftstelle emittiert werden, und die Gleichung

$$\frac{E}{k\,T_m^{5/2}} = \frac{1}{q} \cdot s^* \cdot \exp\left[-\frac{\psi + E}{k\,T_m}\right] \tag{II}$$

mit

$$s^* = \frac{s}{\alpha + \delta} \left| \frac{k}{2\pi m} \right.$$

für den Fall, daß die Elektronen eine endliche Verweilszeit im Leitfähigkeitsband haben[2]. In obigen Gleichungen bedeutet E die Haftstellentiefe (das ist die Energiedifferenz zwischen Haftstelle und Oberfläche bzw. Leitfähigkeitsband), T_m die Temperatur, bei welcher das Maximum in der Glowkurve auftritt, q die Aufheizgeschwindigkeit, ψ die Austrittsarbeit. Der Frequenzfaktor s ist ein Maß für die Austrittswahrscheinlichkeit eines Elektrons aus einer Haftstelle. Im Faktor s^* in Gl. (II) ist neben s auch noch die Wahrscheinlichkeit α für den Austritt des Elektrons aus der Oberfläche und die Wahrscheinlichkeit δ für die Rekombination des Elektrons mit der Haftstelle enthalten.

Berechnet man aus (I) und (II) die entsprechenden $q - T_m$-Kurven, so zeigt sich, daß beide Kurven innerhalb der Meßgenauigkeit unserer Messungen zusammenfallen. Die Kurven weichen wegen der ihnen gemeinsamen Exponentialfunktion nur wenig voneinander ab. Auf Grund der experimentell ermittelten $q - T_m$-Kurven konnte daher nicht entschieden werden, ob die Emission der Exoelektronen direkt aus den Haftstellen oder über das Leitfähigkeitsband erfolgt.

Sowohl aus (I) als auch aus (II) kann man die Energietiefe (Aktivierungsenergie) der Haftstellen sowie den Frequenzfaktor s berechnen, wenn man zumindestens für zwei verschiedene Aufheizgeschwindigkeiten die Temperatur des Maximums kennt. Aus Gl. (I) ergibt sich:

$$E = k \cdot \frac{T_{m_1} \cdot T_{m_2}}{T_{m_1} - T_{m_2}} \cdot \ln \left(\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{T_{m_2}^2}{T_{m_1}^2} \right) \qquad \text{(I a)}$$

Einsetzen der experimentell gefundenen q, T_m-Wertepaare ergab für die vier untersuchten Metalle gleiche Energien, nämlich

$E = 1{,}40 \pm 0{,}05$ eV für das „160°-Maximum" und
$E = 2{,}0 \pm 0{,}1$ eV für das „260°-Maximum".

Die Frequenzfaktoren lagen für das „160°-Maximum" zwischen 10^{13} und 10^{14} sec^{-1}, für das „260°-Maximum" zwischen 10^{16} und 10^{19} sec^{-1}.

Vergleicht man die experimentell gefundenen q - T_m-Kurven mit den unter Verwendung der obigen Werte aus (I) errechneten $q - T_m$-Kurven, so zeigt sich, daß beide gut übereinstimmen (Abb. 4).

Der Frequenzfaktor ist theoretisch von der Größenordnung der Eigenfrequenz der Gitterbausteine. Während der für das „160°-Maximum" berechnete Frequenzfaktor tatsächlich einen dementsprechenden Wert hat, ist s für das „260°-Maximum" um einige Zehnerpotenzen zu groß. Man könnte daraus schließen, daß sich das „260°-Maximum" vielleicht besser durch Gl. (II) beschreiben läßt, da dort

[2] Bezüglich der mathematischen Ableitungen sei auf [5] verwiesen.

das s^* auch noch von anderen Größen abhängt. Auf alle Fälle ist aber das einfache, konventionelle Haftstellenmodell, welches zur Herleitung

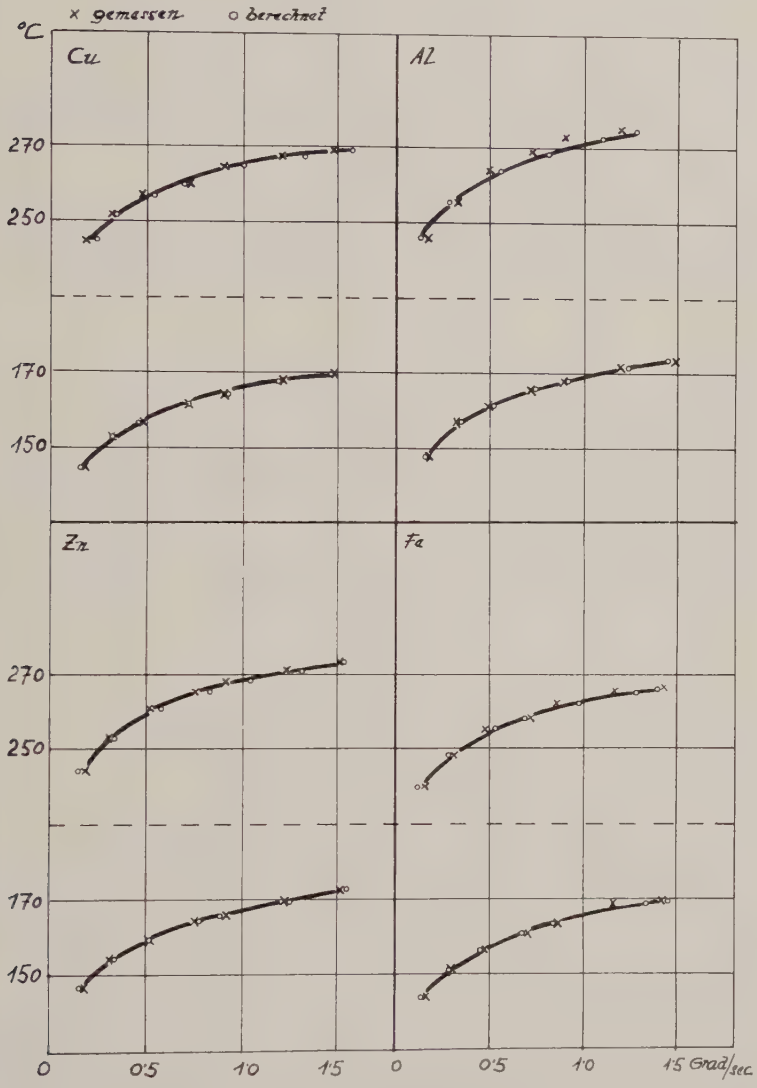

Abb. 4. Vergleich der berechneten $q - T_m$-Kurven mit den gemessenen für die vier untersuchten Metalle

von (I) benutzt wurde, zur Erklärung der Exoelektronenemission bei 260° C nicht mehr ganz hinreichend.

Bei der Berechnung der Haftstellenenergie E geht die Differenz $T_{m1} - T_{m2}$ in den Nenner ein. Eine Änderung in der Neigung der $q - T_m$-Kurven wird sich daher auf den Wert von E wesentlich stärker auswirken als eine Vertikalverschiebung der Kurve um etliche Grade. Dies erklärt den zunächst etwas befremdenden Sachverhalt, daß die Berechnung für alle vier Metalle innerhalb der Fehlergrenzen gleiche E-Werte ergab, obwohl die $q - T_m$-Kurven der einzelnen Metalle nicht ganz zusammenfielen. Eine Verschiebung der Lage des Emissionsmaximums innerhalb gewisser Grenzen bedeutet also nicht notwendigerweise schon eine andere Aktivierungsenergie.

Auf Grund vorstehender Ergebnisse und Überlegungen wird geschlossen, daß die typischen, in den Glowkurven aller Metalle auftretenden korrespondierenden Emissionsmaxima jeweils demselben Haftstellentyp zuzuordnen sind, unabhängig von der Art des Metalles.

Literatur

1. Hieslmair, H und H. Müller, Z. Physik **152**, 642 (1958).
2. Vogel, A., Z. Physik **158**, 77 (1960).
3. Randall, J. T. und M. H. F. Wilkins, Proc. Roy. Soc. A **184**, 366 (1955).
4. Adler, H. und F. Stegmüller, Acta Phys. Austriaca **11**, 31 (1957).
5. Birgfellner, H., Dissertation Univ. Wien 1959.

Zur Renormierung der zweikomponentigen Quantenelektrodynamik

Von

Herbert Pietschmann

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 5 Abbildungen

(*Eingegangen am 20 August 1960*)

Zusammenfassung

Die von L. M. Brown eingeführte und von M. Tonin quantisierte, zweikomponentige Quantenelektrodynamik vom Klein-Gordon Typ wird in der ersten störungstheoretischen Näherung explizit renormiert. Die Ergebnisse werden der Meson-Quantenelektrodynamik einerseits und der Dirac-Theorie andererseits gegenübergestellt. Insbesondere zeigt sich dabei, daß sich das anomale magnetische Moment als endliche (nichtdivergente) Renormierung der Kopplungskonstante darstellt. Schließlich werden die Rechnungen auf das Problem der Elektronmasse angewandt.

Einleitung

Üblicherweise werden Fermionen durch vierkomponentige Spinoren ψ beschrieben, welche der Dirac-Gleichung

$$\gamma^\mu (i\,\partial_\mu - e\,A_\mu)\,\psi = m\,\psi \tag{1}$$

genügen[1]. Seit dem Erfolg der Theorie der Universellen Fermi-Wechselwirkung [1] wird jedoch eine Beschreibung aller Elementarteilchen durch nichtlinearisierte Gleichungen vom Klein-Gordon Typ nahegelegt, da diese Theorie bekanntlich auf die Gleichung

$$\left[(i\,\partial - e\,A)^2 + \frac{e}{2}\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}\right]\psi = m^2\,\psi \tag{2}$$

zurückgeht. Gleichung (2) geht durch Iteration aus der Dirac-Gleichung (1) hervor und ist dieser in bezug auf elektromagnetische Wechselwirkungen völlig äquivalent. Trotzdem scheint sie im Gegensatz zu (1) das Prinzip der minimalen elektromagnetischen Wechselwirkung [2] zu verletzen. Überdies läßt sich, wie T. W. B. Kibble und J. C. Pol-

[1] Bei Verwendung natürlicher Einheiten $\hbar = c = 1$ und der Metrik $g_{00} = 1$, $g_{ik} = -\,\delta_{ik}$.

KINGHORNE [3] zeigten, der Lagrange-Formalismus ausgehend von (2) nicht ohne große Schwierigkeiten aufbauen. Andererseits hat L. M. BROWN [4] eine Klein-Gordon Fermiontheorie in Lagrange-Form vorgeschlagen, die sich einfach nach den üblichen Methoden quantisieren läßt (M. TONIN [5]). Dabei werden nur zweikomponentige Spinoren Ω, ψ und die Pauli-Matrizen in der Form $\sigma^\mu = (1, \underline{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\underline{\sigma})$ verwendet.

Mit den Abkürzungen $q^+ = q_\mu \bar{\sigma}^\mu$, $q^- = q_\mu \sigma^\mu$ geht die Brownsche Quantenelektrodynamik von der Lagrange-Funktion

$$\mathscr{L} = \frac{1}{m} [(i\,\partial^+ - e\,A^+)\,\Omega]^\dagger \cdot [(i\,\partial^- - e\,A^-)\,\psi] - m\,\Omega^\dagger \psi \tag{3}$$

aus. Daraus ergeben sich die Feldgleichungen

$$(i\,\partial^+ - e\,A^+)\,(i\,\partial^- - e\,A^-)\,\psi = m^2\,\psi \tag{4}$$

$$(i\,\partial^- - e\,A^-)\,(i\,\partial^+ - e\,A^+)\,\Omega = m^2\,\Omega \tag{4'}$$

welche mit

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{5}$$

und den daraus folgenden Vertauschungsregeln

$$\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = \sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2\,g_{\mu\nu} \tag{5'}$$

eine zu (2) ähnliche Gestalt annehmen:

$$\left[(i\,\partial - e\,A)^2 - i\,\frac{e}{2}\,h_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right]\psi = m^2\,\psi \tag{6}$$

Nun läßt aber die Lagrange-Funktion (3) die minimale elektromagnetische Wechselwirkung nicht nur direkt erkennen, sondern L. M. BROWN [4] konnte sogar leicht zeigen, daß eine andere Einführung dieser Wechselwirkung die Hermitizität der Hamilton-Dichte zerstören würde.

Die Feldgleichungen (4) lassen sich (mit $p = i\,\partial$) in handlichere Form bringen:

$$(p^2 - m^2)\,\psi(x) = g \cdot \psi(x) \tag{7}$$

$$g = e\,(p^+ A^- + A^+ p^-) - e^2 A^2 \tag{7'}$$

Nach den üblichen Methoden können nun die Feynman-Regeln hergeleitet werden (siehe M. TONIN [5]), welche im wesentlichen mit denen der bekannten Klein-Gordon-Theorie übereinstimmen. Hervorgehoben sei lediglich der Faktor für den Ein-Photon-Verzweigungspunkt, welcher zu

$$e\,\delta^4(p_2 - p_1 \pm k) \cdot [p_2{}^+ \sigma_\mu + \bar{\sigma}_\mu p_1{}^-]$$

proportional ist. Er zeigt die schon von L. M. BROWN angegebene Möglichkeit, die „effektive Kopplungskonstante" g (7') im Impulsraum in Spin- und Ladungsteil aufzuspalten:

$$g = g_L + g_L' + g_S \tag{8}$$

$$g_L = e\,(p_1{}^\mu + p_2{}^\mu)\,A_\mu \qquad g_L' = -e^2 A^2 \tag{9}$$

$$g_S = \frac{e}{2}\,(q^+ A^- - A^+ q^-) = e\,(q^+ A^- - q\,A) = e\,(-A^+ q^- + q\,A) \tag{9'}$$

wenn $q = p_2 - p_1$ der Vierervektor der Impulsübertragung ist.

Für die Normierung

$$\psi^\dagger \Omega = \Omega^\dagger \psi = \frac{p_0}{|p_0|} \equiv \varepsilon \tag{10}$$

ist das Matrixelement für Mott-Streuung in niedrigster Näherung gegeben durch

$$M_1 = -i\,\Omega_2^\dagger\, g_L\, \psi_1 - i\,\Omega_2^\dagger\, g_S\, \psi_1 \tag{11}$$

(Die konstanten Spinoren $\Omega^\dagger$, ψ werden im folgenden unterdrückt.) Ein Vergleich mit dem gleichen Matrixelement der gewöhnlichen Dirac-Theorie zeigt sofort den charakteristischen Unterschied der beiden Formalismen:

$$M_D = -i\,\bar{u}_2\, e\, A^\mu \gamma_\mu\, u_1 \tag{12}$$

Während eine Renormierung der Kopplungskonstanten im Dirac-Formalismus immer nur eine einfache Ladungsrenormierung ($e \to e_1$) sein kann, enthält diese im Brownschen Formalismus außerdem die Renormierung von g_S, das heißt das anomale magnetische Moment $\delta\mu$. Das renormierte Mott-Streuungs-Matrixelement niedrigster Näherung ist also von folgender Gestalt:

$$M_{1R} = -\left[i\, g_{LR} + \left(1 + \frac{\delta\mu}{\mu_0}\right) g_{SR}\right] \tag{13}$$

wobei in $g_R\, e$ durch e_1 ersetzt zu denken ist. Das anomale magnetische Moment tritt also in der Brownschen Theorie (und in jeder nichtlinearisierten Fermiontheorie) als endliche (nichtdivergente) Kopplungskonstanten-Renormierung auf. Diese Renormierung in niedrigster Näherung in allen Einzelheiten durchzuführen ist das Anliegen der Arbeit.

2. Selbstenergie

Da die Brownsche Theorie von der Feldgleichung (7) ausgeht und für $g_S = 0$, das heißt $g = g_L$ direkt in die Spin-0-Theorie übergeht, können einzelne Methoden, insbesondere die Art der Feynman-Graphen, aus den Meson-Theorien (z. B. F. Rohrlich [6]) übernommen werden. Zur Selbstenergie tragen in niedrigster Näherung zwei Feynman-Graphen bei.

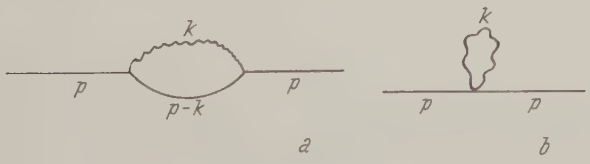

Abb. 1. Selbstenergie-Graphen

Die zugehörigen Matrixelemente sind die gleichen wie die der Mesontheorie, wenn nur für jeden Verzweigungspunkt der richtige Faktor g [Gl. (8)] eingesetzt wird.

$$M_1^S = \frac{-e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \cdot k^{-2}\,[(k-p)^2 - m^2]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \{p^+\sigma^\mu + \bar\sigma^\mu (p-k)^-\}\{(p-k)^+\sigma_\mu + \bar\sigma_\mu p^-\} \quad (14)$$

$$M_2^S = \frac{4e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \cdot k^{-2} =$$
$$-\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4k \cdot k^{-2}\,[(k-p)^2 - m^2]^{-1} \cdot \{4k^2 - 8pk - 4(p^2 - m^2)\} \quad (14')$$

Im Mesonfall ändert sich am ganzen Selbstenergie-Problem nur der Zähler von (14) zu

$$(2p^\mu - k^\mu)(2p_\mu - k_\mu) = k^2 - 4pk + 4p^2 \quad (15)$$

Durch das Auftreten der Spinmatrizen im Fermion-Fall wird der Term k^2 vervierfacht, wodurch er den analogen Term in (14') gerade kompensiert.

$$\{p^+\sigma^\mu + \bar\sigma^\mu (p-k)^-\}\{(p-k)^+\sigma_\mu + \bar\sigma_\mu p^-\} = 4k^2 - 4pk - 4p^2 \quad (16)$$

Die stärksten (quadratischen) Divergenzen fallen also im Fermion-Fall weg; dies ist insoferne eine Folge der bekannten γ_5-Invarianz, als dadurch die Selbstmasse proportional der nackten Masse wird (sie ist proportional dem Abschneidimpuls λ bei quadratischer Divergenz!). Ohne nackte Masse gibt es daher auch keine physikalische Masse und dies ist eine Folge der γ_5-Invarianz.

Um in $M^S = M_1^S + M_2^S$ die divergenten Renormierungskonstanten δm^2 und Z_2 separieren zu können, muß M^S in eine Potenzreihe nach $D = p^2 - m^2$ entwickelt werden.

$$i M^S = \delta m^2 + (Z_2 - 1)(p^2 - m^2) + O(D^2) \quad (17)$$

Die Integrale in (14) müssen daher sorgfältig, unter Benützung auch eines Infrarot-Abschneidimpulses $\varkappa$, berechnet werden und ergeben sodann[2]

$$i M^S = -\frac{\alpha}{2\pi} m^2 \left(3\log\frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{3}{2}\right) + \left\{\frac{\alpha}{2\pi}\left|\log\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{3}{2}\right|\right\} \cdot D + O(D^2) \quad (18)$$

Als Konvergenzfaktor wurde

$$C(k^2) = \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2} \quad (19)$$

verwendet.

Ein Vergleich mit (17) liefert δm^2 und Z_2:

$$\delta m^2 = m^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}\left(3\log\frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{3}{2}\right) \quad (20)$$

$$Z_2 = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\left(\log\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{3}{2}\right) \quad (21)$$

[2] Heaviside-Einheiten werden verwendet, so daß $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$.

3. Die irreduziblen Graphen 3. Ordnung

Wegen der „Doppelwechselwirkung" (von $e^2 A^2$) gibt es drei irreduzible Graphen 3. Ordnung.

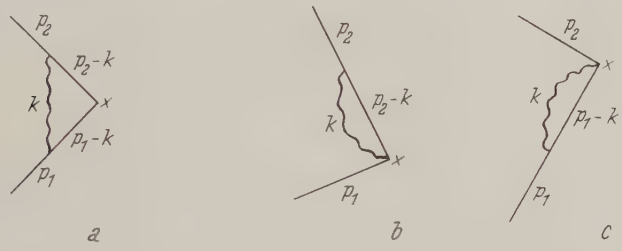

Abb. 2. Die irreduziblen Graphen

Die zugehörigen Matrixelemente lauten:

$$M_a{}^i = \frac{-e^3}{(2\pi)^4}\int d^4k\,[(k-p_1)^2 - m_2^{-1}\,[(k-p_2)^2 - m^2]^{-1}\cdot k^{-2}\cdot \cdot\{[p_2{}^+\sigma^\mu + \bar\sigma^\mu(p_2-k)^-]\cdot \cdot[(p_2-k)^+A^- + A^+(p_1-k)^-]\,[(p_1-k)^+\sigma_\mu + \bar\sigma_\mu p_2{}^-]\} \quad (22)$$

$$M_b{}^i = 2\cdot\frac{e^3}{(2\pi)^4}\int d^4k\,[(k-p_2)^2 - m^2]^{-1}\cdot k^{-2}\cdot\{p_2{}^+A^- + A^+(p_2-k)^-\} \quad (22')$$

$$M_c{}^i = 2\cdot\frac{e^3}{(2\pi)^4}\int d^4k\,[(k-p_1)^2 - m^2]^{-1}\,k^{-2}\,\{(p_1-k)^+A^- + A^+p_1{}^-\} \quad (22'')$$

Der Faktor 2 vor den Matrixelementen (22′) und (22″) ist der für Graphen mit Doppelwechselwirkung charakteristische Gewichtsfaktor. Er war im Falle des Selbstenergie-Elements (14′) gerade 1.

Da alle Renormierungskonstanten von q^2 unabhängig sein müssen, können Glieder höherer Ordnung in q vernachlässigt werden. Insbesondere kann stets

$$p_1{}^2 = p_2{}^2 = m^2 \quad (23)$$

gesetzt werden.

Hier können nun nicht mehr wie im Selbstenergie-Fall alle Integrale (22) auf gleichen Nenner gebracht und gemeinsam ausgewertet werden, da die Entwicklung nach q der erweiterten Integrale (22′) und (22″) nicht mit diesen selbst gliedweise übereinzustimmen braucht.

$$M_a{}^i = \frac{-i\alpha}{2\pi}\left\{\frac{15}{4}g - \frac{3}{2}g_S + g\log\frac{\lambda^2}{m^2} - g_S\log\frac{\lambda^2}{m^2}\right\} + O(q^2) \quad (24)$$

$$M_b{}^i + M_c{}^i = \frac{-i\alpha}{2\pi}\left\{-\frac{9}{4}g + \frac{5}{2}g_S - \frac{3}{2}g\log\frac{\lambda^2}{m^2} + g_S\log\frac{\lambda^2}{m^2}\right\} + O(q^2) \quad (24')$$

Da die Störungstheorie hier überall nur bis zur niedrigsten, nichtverschwindenden Näherung getrieben ist, soll auch hier g ohne den quadratischen Term $e^2 A^2$ verstanden werden. Terme, die nur den Infrarot-Abschneidimpuls enthalten, wurden weggelassen. (Siehe dazu N. NAKANISHI [7].)

Es interessiert nun zunächst wieder der Zusammenhang mit den Mesontheorien. Die gleichen Matrixelemente lauten dort:

$$M_a^{iM} = \frac{-i\alpha}{2\pi}\left\{\frac{9}{4}g_L - \frac{1}{2}g_L \log\frac{\lambda^2}{m^2}\right\} - O(q^2) \tag{25}$$

$$M_b^{iM} + M_c^{iM} = \frac{-i\alpha}{2\pi}\left\{-\frac{9}{4}g_L - \frac{3}{2}g_L \log\frac{\lambda^2}{m^2}\right\} - O(q^2) \tag{25'}$$

Für $g_S = 0$, das heißt $g = g_L$, sind (24′) und (25′) identisch. Da jedoch, wie auch aus Abb. 2 *a* ersichtlich, in (22) der Faktor g zwischen den beiden kontrahierten Verzweigungspunktfaktoren des virtuellen Photons eingeklemmt ist, kann dies wegen der Nichtvertauschbarkeit im Fermi-Fall für (24) und (25) nicht mehr gelten.

Zum Vergleich mit der üblichen Dirac-Theorie sollen zunächst (24) und (24′) vereinigt werden.

$$M^i = \frac{-i\alpha}{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}g\log\frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{3}{2}g + g_S\right\} - O(q^2) \tag{26}$$

Der wesentliche Unterschied ist das Auftreten des Gliedes g_S in (26), das heißt das Auftreten eines Gliedes, das nicht als Ladungsrenormierungs-Konstante vor das ganze Mott-Streuungs-Element (11) gezogen werden kann. Es gilt also hier nicht mehr die Beziehung der Dirac-Theorie

$$i M_D^i = i A^\mu A_\mu = (1 + Z_1)\gamma^\mu A_\mu + O(q^\mu \gamma_\mu) \tag{27}$$

Vielmehr tritt nun als weitere Renormierungskonstante das anomale magnetische Moment $\delta\mu$ auf.

$$i M^i = (1 + Z_1)\cdot g + \frac{\delta\mu}{\mu_0} g_S + O(q^2) \tag{28}$$

Gleichzeitig ist damit die Wardsche Identität in der Form

$$Z_1 = Z_2 \tag{29}$$

für die Brownsche Quantenelektrodynamik bis zur Ordnung e^2 explizit verifiziert.

4. Wellenfunktions-Renormierung

Die durch das Einsetzen der Selbstenergie-Graphen (Abb. 1) in die äußeren Linien des einfachen Mott-Streuungs-Graphen entstehenden, reduziblen Feynman-Graphen, sind in Abb. 3 dargestellt.

Bekanntlich sind die zugehörigen Matrixelemente im Konfigurationsraum zweideutig und im Impulsraum unbestimmt ("0.0"). Um diese

Schwierigkeit zu umgehen, ist auf die Adiabatische Hypothese zurückzugreifen. (Siehe dazu z. B. G. LÜDERS [8]). Der Wechselwirkungsanteil der Lagrange-Funktion (3) ist also mit einer adiabatischen An- und Abschaltfunktion $f(t)$ zu versehen $(q(x)\overleftarrow{\partial_\mu} = -\partial_\mu q(x))$.

$$\mathscr{L}_I = \frac{-1}{m}\,\Omega^\dagger\{i\,e\,(\overleftarrow{\partial^+}A^- + A^+\partial^-)\,f(t) - (e^2A^2 + \delta m^2)\,f(t)^2\}\,\psi \quad (30)$$

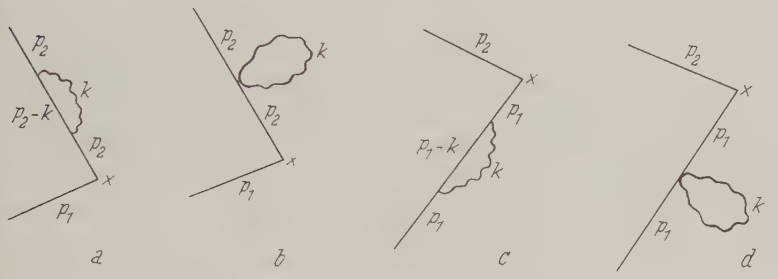

Abb. 3. Feynman-Graphen zur Wellenfunktions-Renormierung

Dabei wurde auch der Massenrenormierungs-Gegenterm explizit eingeführt. Für $f(t)$ soll gelten

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} F(\Gamma)\,e^{-i\Gamma x^0}\,d\Gamma \quad (31)$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Gamma)\,d\Gamma = 1 \quad (32)$$

Aus (30) wird sofort ersichtlich, daß der von e^2A^2 herrührende Teil der Wellenfunktions-Renormierung (Graphen b und d) durch Massenrenormierung gänzlich wegfällt.

Soll das Matrixelement für einfache Mott-Streuung [Gl. (11) im Konfigurationsraum]

$$M_1 = e\int d^4x\,\Omega^\dagger(x)\,\{\overleftarrow{\partial^+}A^- + A^+\partial^-\}\,\psi(x) \quad (33)$$

durch den Graphen der Abb. 3 a renormiert werden, dann ist $\Omega^\dagger(x)$ durch die renormierte Wellenfunktion

$$\Omega_R^\dagger(x) = \Omega^\dagger(x) - i\,e^2\int d^4x_1\int d^4x_2\,\Omega^\dagger(x_1)\,f(t_1)\,\{\overleftarrow{\partial_1}^+\sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu\,\partial_1^-\}\cdot$$
$$\cdot\,\Delta_F(x_1 - x_2)\,\{\overleftarrow{\partial_2}^+\sigma_\mu + \bar{\sigma}_\mu\,\partial_2^-\}\,f(t_2)\,\Delta_F(x_2 - x)\cdot D_F(x_1 - x_2) \quad (34)$$

zu ersetzen. Bei der Transformation in den Impulsraum ist zu beachten, daß die Differentialoperatoren in (34) nun auch auf die Funktionen $f(t) \equiv f(x^0)$ wirken, wodurch Terme mit Γ_1 und Γ_2 auftreten. Die weitere Berechnung liefert jedoch keine neuen Schwierigkeiten, wenn nur sorgfältig nach Γ_1 und Γ_2 entwickelt wird. Nach Durchführung der Massenrenormierung streben im adiabatischen Grenzfalle Γ_1 und Γ_2 gegen 0 und es ergibt sich schließlich

$$\Omega_R^{\dagger}(x) = \Omega^{\dagger}(x)\left\{1 + \frac{\alpha}{2\pi}\left(\log\frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{3}{2}\right)\right\} \tag{35}$$

Die Wellenfunktions-Renormierung ergibt also wirklich einen Faktor Z_2, so daß wegen der Wardschen Identität (29) das Herausfallen der verbotenen Ladungsrenormierung gewährleistet ist. Das zu allen Feynman-Graphen Abb. 2 und 3 gehörige, vereinigte Matrixelement 3. Ordnung lautet also nun

$$M^i + M^w = \frac{-i\alpha}{2\pi} g_S + O(q^2) \tag{36}$$

5. Vakuum-Polarisation

Die obigen Rechnungen haben gezeigt, daß alle wesentlich beobachtbaren Renormierungen (Selbstmasse und anomales magnetisches Moment) natürlich mit denen der gewöhnlichen Dirac-Theorie übereinstimmen; für die „unechten" (spurious) Ladungsrenormierungen (Konstanten Z_1 und Z_2) ist dies nicht der Fall. Die Graphen der Abb. 2 und 3 ergeben also nur zusammengenommen einen von der jeweils zugrundeliegenden, mathematischen Theorie unabhängigen Sinn; die Trennung von irreduziblen und reduziblen Graphen erscheint daher als formal bedingt, während die Abspaltung des Vakuumpolarisations-Problems auch physikalisch sinnvoll erscheint.

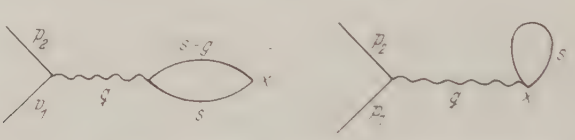

Abb. 4. Feynman-Graphen 3. Ordnung mit Vakuum-Polarisation

Beachtung verdient der Graph mit der Doppelwechselwirkung (Abb. 4 *b*); er tritt zwar auch in der Meson-Quantenelektrodynamik auf, doch da es sich hier um Fermionen handelt, würde man zunächst vermuten, daß dieser Graph wegen des Furry-Theorems verschwindet. Die geschlossene Fermionschleife enthält jedoch nur einen einzigen Eckpunkt und daher nur eine einzige Fermionlinie, so daß eine Vertauschung gar nicht möglich ist. Es wird sich vielmehr zeigen, daß dieser Graph, der wegen der eichinvarianten Einführung des elektro-

magnetischen Feldes berücksichtigt werden mußte, die Eichinvarianz auch weiterhin automatisch sichert, so daß nicht wie im üblichen Dirac-Fall besondere Vorsichtsmaßnahmen notwendig sind. (Siehe dazu auch den Anhang.)

Wegen der geschlossenen Fermion-Schleifen treten in den zu Abb. 4 gehörigen Matrixelementen Spuren auf. (Beachte, das zwar $\bar{\sigma}^\mu \sigma_\mu = 4$, aber $\mathrm{Sp}\,\sigma^0 = 2$.)

$$M_a{}^v = \frac{e^3}{(2\pi)^4} q^{-2} \int d^4s \, [s^2 - m^2]^{-1} \, [(s+q)^2 - m^2]^{-1} \, (p_2{}^+ \sigma^\mu + \bar{\sigma}^\mu p_1{}^-) \cdot$$
$$\cdot \mathrm{Sp}\,\{[(s-q)^+ \sigma_\mu + \bar{\sigma}_\mu s^-] \, [s^+ A^- + A^+ p_1{}^-]\} \quad (37)$$

$$M_b{}^v = \frac{-4\,e^3}{(2\pi)^4} q^{-2} \int d^4s \, [s^2 - m^2]^{-1} \, (p_2{}^+ A^- + A^+ p_1{}^-) \quad (37')$$

Nach Berechnung der Spuren müssen die Integrale eichinvariant abgeschnitten werden (siehe Anhang) und ihre Berechnung ergibt sodann:

$$M_a{}^v = \frac{i\alpha}{\pi} \cdot g \left\{ q^{-2} (\lambda^2 + m^2) \log \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{1}{3} \log \frac{\lambda^2}{m^2} \right\} + O(q^2) \quad (38)$$

$$M_b{}^v = \frac{-i\alpha}{\pi} \cdot g \cdot q^{-2} (\lambda^2 + m^2) \log \frac{\lambda^2}{m^2} \quad (38')$$

Das Matrixelement $M_a{}^v$ [Gl. (38)] allein ist quadratisch divergent. In schöner Analogie zum Selbstenergie-Problem ist es auch hier wieder der Graph mit der Doppelwechselwirkung, der die quadratischen Divergenzen zum Verschwinden bringt. Eichinvarianz (die die Einführung der Doppelwechselwirkung ja erst nötig machte) und γ_5-Invarianz sind es also, die die Milde der Divergenzen in der Fermion-Quantenelektrodynamik verursachen.

Die Vereinigung der beiden Matrixelemente (38) liefert den Faktor Z_3, der mit der Dirac-Theorie völlig übereinstimmt.

$$M^v = \frac{-i\alpha}{\pi} \cdot g \cdot \left(-\frac{1}{3} \log \frac{\lambda^2}{m^2} \right) + O(q^2) \quad (39)$$

Nun erst können sämtliche Matrixelemente 3. Ordnung vereinigt werden: $M^i + M^w + M^v = M_3$

$$M_3 = \frac{-i\alpha}{2\pi} \left\{ -\frac{2}{3} g \log \frac{\lambda^2}{m^2} + g_S \right\} + O(q^2) \quad (40)$$

Der erste Term in (40) renormiert nun das Matrixelement (11)

$$M_{1R} = -i \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \frac{\lambda^2}{m^2} \right) \left\{ g_L + \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right) g_S \right\} \quad (41)$$

Ein Vergleich mit (13) läßt die richtige Ladungsrenormierung $e_1 = Z_3{}^{1/2}\, e$ erkennen und ergibt überdies die Schwinger-Korrektur zum magnetischen Moment

$$\frac{\delta\mu}{\mu_0} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (42)$$

6. Anwendung auf das Problem der Elektronmasse

Nach einer Idee von R. P. FEYNMAN [9] kann die ganze Elektronmasse als elektromagnetische Selbstmasse verstanden werden, wenn die Selbstmasse getrennt für Spin- und Ladungswechselwirkung berechnet und bei verschiedenen Impulsen (λ bzw. Λ) abgeschnitten wird. Eine derartige Aufspaltung läßt sich nur in einer nichtlinearisierten Theorie durchführen. Für die Elektronmasse erhält FEYNMAN

$$\delta m^2 = \frac{3\,\alpha}{2\,\pi}(\Lambda^2 - \lambda^2) \tag{43}$$

Mit Hilfe der in den Gleichungen (9) dargestellten Aufspaltung ist es nun leicht, den Einfluß dieser Annahme auf das anomale magnetische Moment (42) zu berechnen. Dazu sind nur in allen Rechnungen zu irreduziblen Graphen und zur Wellenfunktions-Renormierung Spinkopplung g_S und Ladungskopplung g_L getrennt einzuführen. (Als Beispiel siehe Abb. 5.)

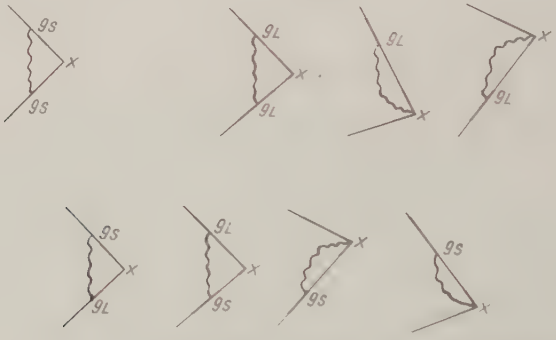

Abb. 5. Aufspaltung der irreduziblen Graphen in Spin- und Ladungsanteil

Die Berechnung liefert keine neuen Schwierigkeiten: virtuelle Photonen mit beiderlei Wechselwirkung müssen natürlich beim kleineren Abschneidimpuls der Spin-Wechselwirkung abgeschnitten werden.

Das anomale magnetische Moment errechnet sich dann als

$$\frac{\delta\mu}{\mu_0} = \frac{\alpha}{2\,\pi}\left\{1 + \frac{3}{2}\log\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}\right\} \tag{44}$$

Wegen der logarithmischen Abhängigkeit vom Verhältnis der Abschneidimpulse fällt die Abweichung von der Schwinger-Korrektur trotz der hohen experimentellen Genauigkeit weit unterhalb der Fehlergrenzen, wenn die Abschneidimpulse in der Größenordnung der Nukleonmassen gewählt werden und (43) befriedigt wird.

Es ist mir eine Freude, auch an dieser Stelle Herrn Univ.-Doz. Dr. K. BAUMANN für zahlreiche wertvolle Hinweise, sowie für die Durchsicht des Manuskripts danken zu können.

Anhang

Abschneideverfahren bei der Vakuum-Polarisation

In der üblichen Dirac-Theorie treten beim Konvergentmachen der Integrale mit dem einfachen Konvergenzfaktor

$$C(k^2) = \frac{-\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}$$

nicht eichinvariante Ergebnisse auf. Die Schwierigkeit kann durch Verwendung des Abschneideverfahrens von BETHE und PAULI umgangen werden. Nach der allgemeinen Theorie der Regularisierung wird die Eichinvarianz nur dann nicht gestört, wenn durch die Einführung der Regulatormassen (Abschneidimpulse) das betreffende Integral nicht faktorisiert wird, das heißt daß in einem Feynman-Graphen aus einer zusammenhängenden Fermion-Linie nicht ein Teil herausgegriffen und mit Konvergenzfaktoren versehen werden darf. Beim Abschneideverfahren von BETHE und PAULI wird nun tatsächlich das betreffende Integral $J(m^2)$ einfach als ganzes bei großen Massen der virtuellen Teilchen „abgeschnitten".

$$J(m^2) \to J(m^2) - J(m^2 + \lambda^2) = -\int_0^{\lambda^2} \frac{\partial J(m^2 + L)}{\partial (m^2)}\, dL$$

Im gewöhnlichen Dirac-Fall treten durch das Operatorfreimachen der Nenner auch im Zähler die Massen m auf, welche natürlich mitzudifferenzieren sind.

Für die nichtlinearisierte Quantenelektrodynamik genügt es jedoch, wenn vor Einführung des einfachen Konvergenzfaktors $C(k^2)$ die Nenner nach den üblichen Feynman-Formeln vereinigt werden, wodurch das Faktorisieren bereits verhindert wird. Auf das meist mühsame Differenzieren des ganzen Integranden kann verzichtet werden, da im Zähler nun keine Massen auftreten können.

Die Äquivalenz der beiden Abschneideverfahren geht dann sogar in eine Identität über, da für nur einen Nenner $k^2 - m^2$ stets gilt

$$(k^2 - m^2)^{-1} \cdot C(k^2 - m^2) = -\int_0^{\lambda^2} dL\, (k^2 - m^2 - L)^{-2} =$$

$$= -\int_0^{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial (m^2)} (k^2 - m^2 - L)^{-1}\, dL$$

Für stärkere Divergenzen kann

$$\frac{\lambda^4}{(k^2 - \lambda^2)^2}$$

als Konvergenzfaktor eingeführt werden.

Literatur

1. Feynman, R. P. und M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
2. Gell-Mann, M., Nuov. Cim. Suppl. **4**, 848 (1956).
3. Kibble, T. W. B. und J. C. Polkinghorne, Nuov. Cim. **8**, 74 (1958).
4. Brown, L. M., Phys. Rev. **111**, 957 (1958).
5. Tonin, M., Nuov. Cim. **14**, 1108 (1959).
6. Rohrlich, F., Phys. Rev. **80**, 666 (1950).
7. Nakanishi, N., Progr. Theor. Phys. **19**, 159 (1958).
8. Lüders, G., Zeitschr. f. Naturf. **7** a, 206 (1952).
9. Feynman, R. P., CERN Conf. Report 216 (1958).

Besonderheiten bei der Leitung von Ag^+-Ionen in kristallinem Quarz*

Von

F. Gross

Physikalisches Institut der Universität Graz

Mit 8 Abbildungen

(*Eingegangen am 24. September 1960*)

Zusammenfassung

Die Fremdionenelektrolyse in kristallinem Quarz führt zu besonders geformten Abscheidungen. Es bilden sich metallische Schichten senkrecht zur Hauptachse, Nadeln parallel dazu und elektrisch nichtleitende Fäden. Ferner kann der Kristall die Fähigkeit erhalten, im UV zu fluoreszieren. Die Schichten ergeben sich als Folge der Anisotropie der Ionenleitfähigkeit und haben immer eine metallische Verbindung mit der Kathode zur Bedingung. Eine solche Verbindung kann künstlich hergestellt werden oder bildet sich selbständig bei verunreinigten Oberflächen. Bei Verwendung von reiner Gleichspannung als Elektrodenspannung kann dem Elektrolysestrom eine Wechselstromkomponente überlagert sein. Deren Frequenz wurde bis 250 KHz beobachtet.

Einleitung

Wie schon seit langem bekannt ist, vermag kristalliner Quarz einen Strom einwertiger Metallionen etwa Ag^+, Cu^+ in Richtung der optischen Achse zu leiten. Die Temperatur, oberhalb welcher dies leicht beobachtet werden kann, wird mit 450° C angegeben [1]. Eine Ionenleitfähigkeit dieser Art in einer anderen Richtung wurde bisher noch nicht beobachtet.

Zur Ausführung eines solchen Versuches wird ein Kristallprisma so zwischen zwei Elektroden eingespannt, daß in Richtung der optischen Achse ein Stromfluß ermöglicht wird. Die Anode muß dabei aus dem Metall bestehen, dessen Ionen als Ladungsträger verwendet werden sollen. Erwärmt man nun die Anordnung in einem elektrischen Ofen und legt an die Elektroden eine Spannung an, so kann man einen Ionenstrom beobachten, der an der Kathode eine metallische Abscheidung hervorruft. Da die Leitung nur in der Richtung der optischen

* Teile dieser Arbeit entstammen der Dissertation von F. Gross, Universität Graz, 1959.

Achse erfolgt, stellt diese Abscheidung eine vollkommene Abbildung der Anode dar. Hat z. B. die Anode ein Loch, so hat es die kathodenseitig gebildete Metallschichte ebenso, in gleicher Größe und Form. Die Leitfähigkeit eines Kristalles in Richtung der optischen Achse ist bei einer Temperatur von 500° C für Silberionen größenordnungsmäßig $3 \cdot 10^{-6}$ $1/\Omega$ cm. Der Wert ist abhängig von der individuellen Beschaffenheit des Kristalles und von der Dauer der Vorelektrolyse.

Drescher-Kaden und Böttcher [2] beobachteten außerdem noch schichtförmige Metallabscheidungen im Inneren des Kristalles, welche räumlich-periodisch angeordnet und im übrigen gleich der ersten Schichte beschaffen waren. Die Orientierung war parallel zur ersten Abscheidung festgestellt worden.

Diese Schichtbildung im Kristallinneren war als Besonderheit zu werten und gab den Anlaß zu weiteren Untersuchungen.

Apparate und Versuchsmaterial

Zur Durchführung der Versuche stand ein elektrischer Rohrofen zur Verfügung, welcher drei doppelwandige Fenster aus Quarzglas besitzt, wodurch eine Beleuchtung und Beobachtung des Versuchsstückes im

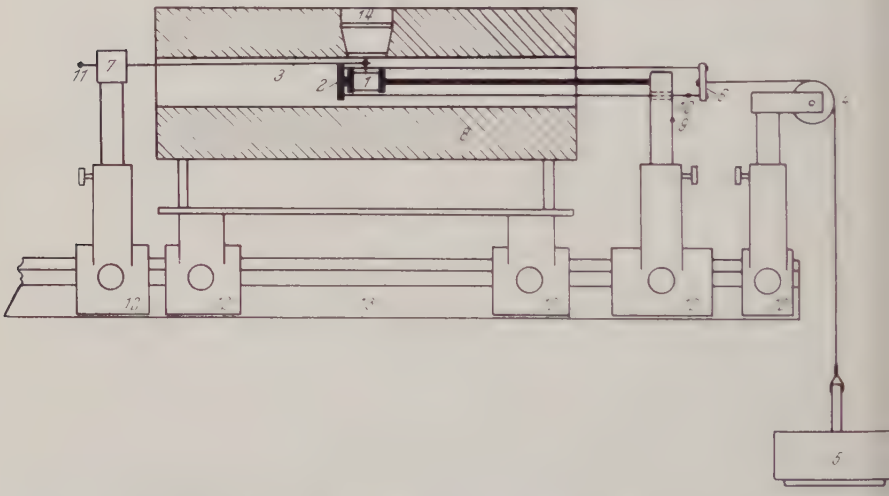

Abb. 1. Schematische Darstellung der Versuchsanordnung. (*1*) Kristall, (*2*) Einspannvorrichtung, (*3*) Hilfselektrode, (*4*) Rolle, (*5*) Gewicht zur Erzeugung des Elektrodendruckes, (*6*) Isolator, (*7*) Isolator für die Hilfselektrode, (*8*) Ofen, (*9*) elektrischer Anschluß Kathode, (*10*) Anodenanschluß, (*11*) Anschluß für die Hilfselektrode, (*12*) Stativreiter, (*13*) Dreikantschiene

Ofen ermöglicht wurde. Die räumliche Temperaturkonstanz war dabei noch genügend gut. Die erforderliche zeitliche Temperaturkonstanz konnte durch Stabilisierung des Heizstromes mit einem magnetischen Spannungskonstanthalter erreicht werden.

Das Kristallmaterial war elektrisch und optisch verwachsungsfrei. Die Proben hatten die Abmessungen $8 \times 8 \times 12$ mm³ mit der optischen Achse parallel zu den langen Kanten. Alle Flächen waren poliert und waren von einer kristallverarbeitenden Firma bezogen worden.

Für die Elektroden wurde Silber mit einer Reinheit von $998^0/_{00}$ verwendet. Es wurde als Blech mit 0,2 mm Dicke auf die Kristallflächen aufgelegt.

Die Einspannvorrichtung war aus Böhler-Antitherm-Stahl hergestellt und ermöglichte ohne Isolatoren im Ofen eine sichere Halterung des Kristalles. Eine später erforderlich gewordene Hilfselektrode mit Platinspitze war ebenso aus diesem Material angefertigt worden. Der gesamte Aufbau der Versuchsanordnung erfolgte auf einer Normal-Dreikantschiene (Zeiß-Schiene) und ermöglichte so eine einfache und schnelle Umstellung der Apparatur. Eine schematische Darstellung der Anordnung ist in Abb. 1 zu ersehen.

Die Elektrodenspannung wurde von einem stabilisierten Netzgerät bereitgestellt. Die Messung von Strom und Spannung erfolgte mit gewöhnlichen technischen Meßgeräten. Eine zusätzliche Siebkette und eine Hochpaßabzweigung ermöglichte eine oszillographische Kontrolle des Anodenstromes.

Bedingung für die selbständige Schichtbildung

Wie schon Drescher-Kaden und Böttcher das Zustandekommen der Schichten deuteten, muß in einem bestimmten Kristallbereich in der Nähe der Kathode metallische Leitfähigkeit herrschen, wodurch den Silberionen das reduzierende Elektron zugeführt wird.

Bei allen ausgeführten Versuchen konnte im kalten Zustand nie eine Leitfähigkeit festgestellt werden. Eine Beobachtung des Schichtwachstums zeigte jedoch, daß die Schichte immer an der Kristalloberfläche ihren Ausgangspunkt hat. Eine mikroskopische Untersuchung dieser Stelle brachte immer eine Linie zum Vorschein, die mit der Kathode Verbindung hatte. Solche offensichtlich elektrisch leitfähige Brücken über die Oberfläche wurden besonders häufig an rauhen Stellen (unpolierte gebrochene Kanten) oder in winzigen Ritzspuren beobachtet.

Beim Abkühlen verändern sich die Oberflächenbrücken und verlieren ihre Leitfähigkeit. Dies erfolgt vermutlich durch Unterbrechung infolge ihrer ungleichen Wärmedehnzahl mit dem Kristall. Daß sie bei hoher Temperatur aber elektrische Leitfähigkeit besitzen, geht daraus hervor, daß eine gleichartige Schichtbildung einsetzt, wenn man an eine Seitenfläche des Kristallprismas eine Hilfselektrode aufsetzt, und diese auf Kathodenpotential bringt. Andererseits bleibt die Schichtbildung in allen Fällen aus, wenn man die oberflächennahen Bereiche des Kristalles nicht zur Elektrizitätsleitung heranzieht. Dies kann leicht erreicht werden, wenn die Anode so klein gehalten wird, daß sie nicht die gesamte Kristallfläche vollkommen bedeckt oder, was noch

einfacher ist, wenn man die Anode beliebig groß läßt, die anodenseitigen Kanten des Kristalles aber ein wenig abschleift.

Der Aufbau der oberflächlichen Brücken ist ein metallischer, wie dies das mikroskopische Bild bereits vermuten läßt. Es wird bewiesen durch die hohe Leitfähigkeit bei hohen Temperaturen. In einigen Fällen kam es vor, daß eine solche Brücke bis zur Anode weiter gewachsen war und einen Elektrodenkurzschluß erzeugte. In solchen Fällen konnte immer ein Widerstand von einigen hundert Ohm gemessen werden. Unter Zugrundelegung des geschätzten Durchmessers von 0,002 mm und einer Länge von 1,2 cm kann man größenordnungsmäßig den spezifischen Widerstand bestimmen und erhält $10^{-5}\ \Omega$ cm. Dieser Wert kann nur von einem Metall erreicht werden. Da nur Silber in genügendem Maße zur Verfügung steht, liegt außer Zweifel, daß die Oberflächenbrücken aus Silber bestehen.

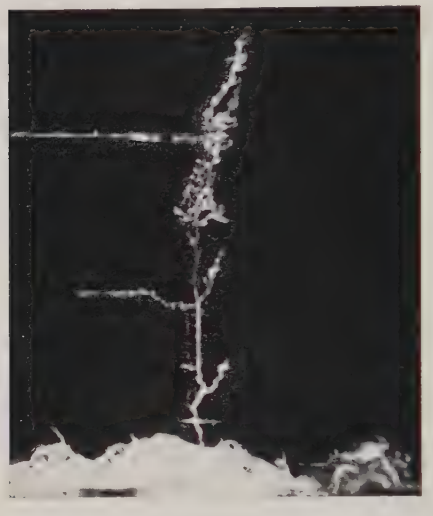

Abb. 2. Oberflächliche Silberbrücke

Aus dem Umstand, daß sich die Oberflächenbrücken bevorzugt an rauhen Stellen und Ritzen ausbilden, läßt es sich ableiten, daß für ihre Entstehung vorher dagewesene Verunreinigungen verantwortlich sind. Das Experiment bestätigt die Richtigkeit dieser Annahme. Eine sorgfältige Reinigung des Kristalles vor der Elektrolyse verhindert die Ausbildung von Oberflächenbrücken. Bewährt hat sich, den Kristall mehrmals in der angegebenen Reihenfolge mit Äther, Alkohol, destilliertem Wasser, dann wieder Alkohol, Äther zu waschen. Zu beachten ist aber auch, daß der Ofen rein sein muß, da sonst Verunreinigungen im Ofen verdampfen und am Kristall kondensieren.

Die Art der Verunreinigung, die zur Brückenbildung Anlaß gibt, wurde experimentell überprüft. Es konnte festgestellt werden, daß dazu nur anorganische Verunreinigungen befähigt sind. Verkohlbare organische Substanzen sind wirkungslos. Der Umstand, daß die Oberflächenbrücken von der Kathode aus gegen die Anode wachsen und daß dazu anorganische Verunreinigungen erforderlich sind, erklärt die Entstehung der Brücken. Silberionen müssen offensichtlich über die Kristalloberfläche zur Kathode wandern, wo sie dann zu Metall reduziert werden. Um die elektrische Neutralität entlang ihres Weges zu wahren, müssen noch Anionen vorhanden sein, welche durch die Verunreinigungen geliefert werden.

Arten von Abscheidungen

Durch den Elektrolysestrom treten im Kristall eine Reihe von Veränderungen und Abscheidungen auf. Die häufigsten davon sind:

a) Schichten senkrecht zur optischen Achse,

b) Nadeln in Richtung der optischen Achse,

c) elektrisch nicht-leitende Fäden,

d) Fluoreszenz.

Die Schichten, deren Bildung durch Oberflächenbrücken oder durch eine Hilfselektrode verursacht worden waren, schließen mit der optischen Achse immer einen Winkel von annähernd 90° ein. Die Abweichung von einem rechten Winkel liegt im allgemeinen zwischen 10 und 30 Winkelminuten, und zwar so, daß die Wachstumsrichtung der Schichte mit der Richtung der optischen Achse von der Schichte zur Anode einen spitzen Winkel bildet. Dies gilt auch dann, wenn die optische Achse einen beliebigen Winkel mit der Kristalloberfläche einschließt. Die erste Abscheidung erfolgt dabei an der kathodenseitigen Kristalloberfläche, jede Schichte im Inneren aber hat die oben beschriebene Orientierung.

Nadelartige Abscheidungen sind gerade, äußerst dünne Gebilde, die von der Kathode oder einer Schichte zur Anode wachsen. Ihre Orientierung ist immer die der optischen Achsenrichtung, ihr Auftreten ist vollkommen unregelmäßig, ihre Länge ist unter günstigen Bedingungen mit den Kristallabmessungen vergleichbar. Ihre elektrische Leitfähigkeit geht daraus hervor, daß sich oft eine Schichte an der Spitze der Nadeln zu bilden beginnt, wodurch jedoch das Wachstum der Nadel nicht unterbrochen wird. Die Bildungsgeschwindigkeit der Nadeln ist wesentlich weniger temperaturabhängig als die der Schichten, so daß sie sich bevorzugt bei niederen Temperaturen etwa zwischen 300° C und 400° C ausbilden. Über 500° C wachsen die Schichten um so viel schneller, daß Nadeln praktisch nicht mehr beobachtet werden können.

In einem vollkommen ungestörten Kristall läßt sich das Auftreten der Nadeln nicht erklären. Wie später gezeigt werden wird, ist die normale Abscheidungsform die Schichte. Eine nadelförmige Abscheidung kann nur als Folge des Fehlbaues des Kristalles verstanden werden, und zwar so, daß in einem engen Bereich die durch den kristallographischen Bau des Quarzes bedingten Kanäle in der Hauptachsenrichtung eine bessere Leitfähigkeit haben, als die in ihrer näheren Umgebung. Die Ionen können sodann über die Oberfläche des Kristalles unter der Anode — welche ja nie vollkommen aufliegt — zu den besser leitfähigen Kanälen hinwandern und von dort durch diese gegen die Nadelspitze. Dies bei niedrigen Versuchstemperaturen, wo die Ionenbeweglichkeit an der Oberfläche größer ist als im Inneren. Bei hohen Temperaturen hingegen überwiegt die Beweglichkeit in den Kanälen gegenüber der an der Oberfläche, der Ionenstrom wird homogen und die Abscheidung hat die Form einer Schichte.

Eine weitere Abscheidungsform stellt lange, gerade Fäden dar, die regellos angeordnet sind. Ihre Länge reicht meist von einer Oberfläche des Präparates zu einer anderen. Mit dem freien Auge kann man sie bei Dunkelfeldbeleuchtung gut sehen. Im Mikroskop erscheinen sie als Streifen bestehend aus einer Unzahl winziger Tröpfchen, die jedoch in übereinanderliegenden, kristallographisch orientierten Flächen angeordnet sind. Als Orientierungsrichtungen konnten die der natürlichen Kristalloberflächen festgestellt werden. In Abb. 3 ist ein Beispiel wiedergegeben.

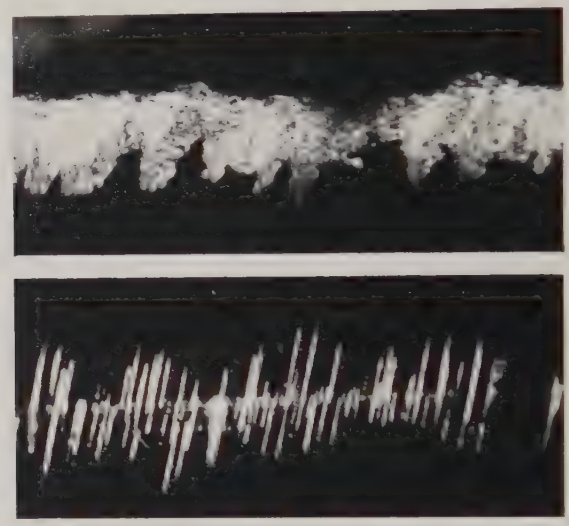

Abb. 3. Elektrisch nichtleitende fadenförmige Abscheidung. 120fache Vergr. Unten ist der Faden um 90° verdreht

Bei diesen Fäden handelt es sich offensichtlich um Hohlräume, die schon vor der Elektrolyse vorhanden waren. Aber erst durch die Elektrolyse erfährt deren Inhalt solche Veränderungen, daß er gesehen werden kann.

Eine weitere Veränderung, die der Kristall durch die Elektrolyse erfährt ist ein Auftreten der Fluoreszenz bei Bestrahlung mit Ultraviolett bei Zimmertemperatur. Die Farbe des Fluoreszenzlichtes ist gelb. Es ist jedoch bemerkenswert, daß in den seltensten Fällen der gesamte Kristall gleichmäßig hell fluoresziert. Meist sind die heller leuchtenden Gebiete scharf abgegrenzt. Die Begrenzungsflächen entsprechen den natürlichen Kristalloberflächen, so daß man gegebenenfalls frühere Wachstumsstadien des Kristalls als fluoreszierenden Bereich beobachten kann. Als Ursache dafür muß die Verunreinigung des Kristalls angenommen werden, an die sich die Silberionen anlagern und sodann Zentren der Lumineszenz darstellen.

Die Struktur der Schichten

Hat sich in einem Kristall eine Schichte ausgebildet, so ist sie am Anfang glänzend. Nur wenn der Strom längere Zeit aufrechterhalten bleibt, wird sie rauh, sie erscheint dann mattweiß. Die Festigkeitseigenschaften werden durch eine Schichte nicht wesentlich geändert. Eine Spaltbarkeit tritt durch sie nicht auf. Die Längsdimensionen des Kristalles verlängern sich jedoch um die Schichtdicke.

Abb. 4. Charakteristische Linienzeichnung auf der Schichte. 1000fache Vergr.

Anders ist der Sachverhalt, wenn nach Ausbildung der Schichte ihre elektrische Verbindung mit der Kathode unterbrochen wird, die Elektrodenspannung aber angelegt bleibt. In diesem Falle wird an der Schichte anodenseitig Silber abgeschieden, kathodenseitig aber abgebaut, wodurch die Schichte den Kristall nach kurzer Zeit in zwei Teile zerlegt. Der Silberbelag haftet immer an der der Anodenseite zugewendeten Spaltfläche.

Beobachtet man eine Schichte nach der Spaltung unter dem Mikroskop, so erkennt man eine eigenartige Linienzeichnung. Die Linien grenzen Gebiete verschiedener Höhe voneinander ab. Sie erscheinen umso stärker, je größer der Höhenunterschied ist. Bei sehr starker Vergrößerung kann man das Grundelement dieser Linienzeichnungen isolieren. Es handelt sich dabei um zwei Linien, die in Wachstumsrichtung auseinanderlaufen. Eine Mikrophotographie einer Schichte ist in Abb. 4 wiedergegeben.

Die oben beschriebene Linienstruktur wird verständlich, wenn man sich die Schichte aus zwei Grundabscheidungstypen aufgebaut denkt: nämlich kurzen nadelartigen Abscheidungen in Richtung der optischen Achse und den eigentlichen Schichten senkrecht dazu. Eine schematische Zeichnung davon ist in Abb. 5 wiedergegeben.

Während die Schichte wächst tritt plötzlich eine Abscheidung in Richtung zur Anode auf. Dies könnte an einer Fehlstelle sein. Der Ionenstrom wird nun von der Spitze dieser Nadel abgefangen, so daß sich dort eine neue Schichte zu bilden beginnt. Durch feldabschirmende Wirkung gewinnt sie im Laufe ihres Wachstums auf Kosten der alten immer mehr an Breite. Es ergeben sich zwei auseinanderlaufende Linien. Durch oftmalige unregelmäßige Wiederholung dieses Vorganges entsteht schließlich das Gesamtbild der Schichte.

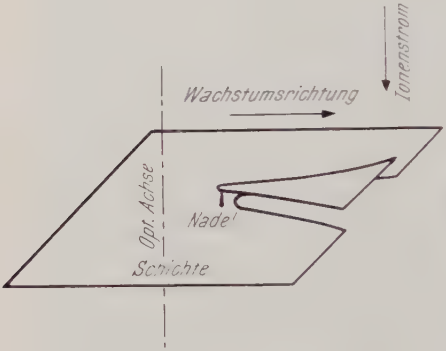

Abb. 5. Erklärung der Entstehung auseinander laufender Linien

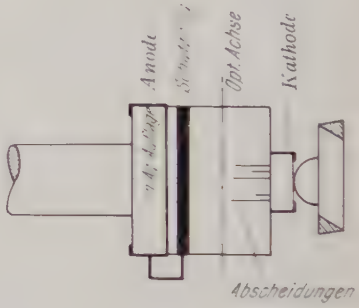

Abb. 6. Anordnung zur Untersuchung der Leitfähigkeit senkrecht zur optischen Achse

Die Leitfähigkeit senkrecht zur optischen Achse

Um den Bildungsmechanismus der Schichte zu erklären war es notwendig festzustellen, ob für Silberionen eine von Null verschiedene Beweglichkeit senkrecht zur optischen Achse existiert. Schon der Umstand, daß die gebildeten Schichten immer ein genaues Abbild der Anode darstellen, weist darauf hin, daß die Beweglichkeit in dieser Richtung, wenn überhaupt vorhanden, sehr klein sein muß.

Das Beobachtungsergebnis, daß die Beweglichkeit der Silberionen an der Oberfläche bei nur sehr geringen Verunreinigungen verhältnismäßig hoch ist, macht für derartige Experimente besondere Vorkehrungen erforderlich. Die Anordnung ist schematisch in Abb. 6 dargestellt. Um zu verhindern, daß die Silberionen so weit über die Oberfläche wandern, bis sie einen Weg in Richtung der optischen Achse in das Kristallinnere finden, wurde ein Schutzring aus Nickel angebracht, welcher mit der Anode verbunden war. Dieser hält die Silberionen auf, Nickelionen selbst können jedoch nicht in den Kristall eindringen. Er wurde in einer eingeschliffenen Nut elektrolytisch aufgebracht.

Der Strom bei dieser Versuchsanordnung war bei dem in Frage kommenden Temperaturbereich vergleichbar mit dem Kriechstrom über die Kristalloberfläche, und konnte daher nicht gemessen werden. Bei einer Elektrodenspannung von 1500 V und einer Temperatur von 500° C war nach 5 bis 10 Tagen in den meisten Fällen eine Silberabscheidung an der Kathode zu beobachten. Sie war immer mit derselben Genauigkeit, wie sie für Schichten beschrieben worden war, in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse ausgebildet, stellte aber keine vollständige Schichte dar, sondern ein von einem Punkt der Kathode ausgehendes Astwerk.

Aus dem Vergleich der erforderlichen Zeiten für die Ausbildung einer Abscheidung bei der Ionenleitung in Richtung der optischen Achse und senkrecht dazu läßt sich unter Berücksichtigung der verwendeten Elektrodenspannungen eine — allerdings nur grobe — Abschätzung des Leitfähigkeitsverhältnisses parallel und senkrecht zur Hauptachse durchführen. Bei 500° C ergab sich, daß die Leitfähigkeit senkrecht zur Hauptachse größenordnungsmäßig 10^{-4} mal kleiner ist als parallel dazu.

Bildungsmechanismus der Schichte

Daß sich eine Schichte ausbildet, die Abscheidung also in Richtung geringster elektrischer Leitfähigkeit wächst, erscheint auf den ersten Blick sonderbar. Eine einfache Rechnung aber zeigt, daß gerade die Schichte den Normalfall einer Abscheidung darstellt.

Dazu muß festgestellt werden, daß das Ohmsche Gesetz in der Nähe der Schichtkante nicht gilt. Es ist begreiflich, daß infolge der hohen Feldstärke und nur einer beschränkten Zahl zur Verfügung stehender geladener Störstellen eine relative Trägerverarmung zustandekommen muß, so daß bei Vernachlässigung der Feldverzerrung durch diese die Rechnung nicht zu ungenau wird. Das Feld der Schichte soll durch das einer geladenen Linie ersetzt werden. Diese Näherung kann in einem genügend großen Winkelbereich in der Wachstumsrichtung als hinlänglich gelten. Die geringe dielektrische Anisotropie soll vernachlässigt werden. Die Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung: $\Delta\phi = 0$ lautet dann

$$\phi = \frac{C_1}{2} \ln (x^2 + z^2) + C_2$$

z ist die Koordinate in Richtung der optischen Achse, x eine dazu senkrechte, eine Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 erübrigt sich. Rechnet man aus dieser Gleichung die Feldstärke aus, so erhält man

$$E_x = \frac{C_1}{x^2 + z^2} \cdot x$$

$$E_z = \frac{C_1}{x^2 + z^2} \cdot z$$

Unter Berücksichtigung, daß die Ionenbeweglichkeit in der Z-Richtung um den Faktor α größer ist als in der X-Richtung, ergibt sich die Gleichung der Ionenbahn:

$$\frac{dz}{dx} = \alpha \frac{x}{z}$$

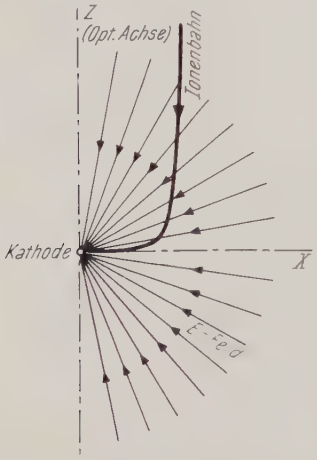

Abb. 7. Ionenbahn in der Nähe der Schichtkante

Die Lösung dieser Gleichung lautet sodann $z = C\, x^{\alpha}$. Diese stellt Kurven dar, welche den Ursprung mit der Steigerung 0 erreicht. Wie aus Abb. 7 zu ersehen ist, verursacht dies, daß die Abscheidung in der x-Richtung wächst, also in der Richtung geringster Ionenbeweglichkeit.

Diese unter speziellen Bedingungen geführte Rechnung vermittelt eine prinzipielle Anschauung von den Vorgängen an der Schichtkante, welche auch im wirklichen Fall mit einem etwas geänderten Feldlinienbild nicht wesentlich anders sein können. Der Faktor, der größenordnungsmäßig mit 10^4 bestimmt werden konnte, muß natürlich an der Schichtkante nicht in gleicher Größe existieren. Wegen der dort herrschenden elastischen Spannung ist es wahrscheinlich, daß er in diesem Bereich kleiner ist.

Periodische Widerstandsschwankung des Kristalles bei der Elektrolyse[1]

Es konnte beobachtet werden, daß unter bestimmten Umständen der Elektrolysestrom eine Wechselkomponente enthält, wenn eine reine Gleichspannung an die Elektroden angelegt wird. Gleichzeitig können auch im Hörbereich liegende mechanische Schwingungen auftreten. Sie vermitteln einen akustischen Eindruck von Singen oder Knirschen.

Die beobachteten Frequenzen des Wechselstroms liegen zwischen 1 KHz und 250 KHz. Sie treten selten rein sinusförmig auf. Meist sind eine größere Zahl von harmonischen Oberschwingungen vorhanden. Die Amplitude konnte maximal ein Prozent der Gleichstromkomponente gemessen werden.

Die Beobachtungen wurden mit einer Anordnung nach Abb. 8 vorgenommen. Die Frequenzmessung erfolgte mit einem geeichten Resonanzkreis, zur Bestimmung der Amplitude aus der Kurvengröße am Oscillographen war die Anordnung geeicht.

[1] Bei Drucklegung wurde eine Arbeit bekannt, die diese ebenso behandelt: H. H. Penninger, Elastische Schwingungen von Quarzplatten im stationären elektrischen Feld. Naturwissenschaften **47**, 275 (1960).

Kurz nach dem Einschalten führt der Elektrolysestrom meist noch keinen Wechselstromanteil. Einige Zeit bevor dieser einsetzt, kann man ein auffallend starkes Rauschen feststellen. Der Einsatz erfolgt plötzlich, Amplitude und Frequenz schwanken andauernd, häufig treten sprunghafte Veränderungen auf. Hat die Einspannvorrichtung eine leicht anregbare Resonanzfrequenz, so liegt die Frequenz des Wechselstromanteiles vorzugsweise in deren Nähe.

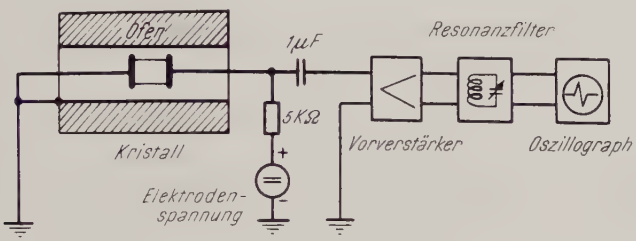

Abb. 8. Schaltschema der Anordnung zur Untersuchung der Wechselstromkomponente

Nicht alle untersuchten Kristalle zeigten diese Erscheinung gleich stark. Es konnte festgestellt werden, daß ein bestimmter kritischer Wert der Elektrodenspannung existiert, bei dessen Überschreitung Wechselströme auftreten. Diese Elektrodenspannung muß umso höher eingestellt werden, je niedriger die Versuchstemperatur ist. Das Produkt gebildet aus Elektrodenspannung und Elektrolysestrom, also die Gleichstromleistung am Kristall, ist für eine bestimmte Probe für den Wechselstromeinsatz eine temperaturunabhängige Konstante. Sie beträgt für die meisten Kristalle mit den Abmessungen $8 \times 8 \times 12\,mm^3$ größenordnungsmäßig $5 \cdot 10^{-3}$ Watt. Dieses Produkt ist allerdings nur in einem beschränkten Zeitraum konstant. Bleibt der Kristall längere Zeit unter Strom, so kommt es zu einem steten Absinken. Wird er stromlos auf Versuchstemperatur gehalten, zu einem Ansteigen.

Die Anregung von Wechselströmen muß von piezoelektrischen Schwingungen unterschieden werden. Bei letzteren treten mechanische Schwingungen gleichzeitig mit elektrischen Feldschwingungen auf. In dem hier beobachteten betrachteten Fall treten jedoch Stromschwankungen bei konstanter Spannung auf, was formell eine Widerstandsschwingung ist. Daß diese ebenso mit einer mechanischen Schwingung gemeinsam auftritt, muß wohl auch hier auf den polaren Charakter des Kristalles zurückgeführt werden, und scheint auch einen ursächlichen Zusammenhang mit den Schwingungen zu haben.

Literatur

1. R. Klemm, Notizbl. d. Verh. f. Erdk. u. d. geol. Landesanstalt, Darmstadt, 5. F., 10, 1928.
2. F. K. Drescher-Kaden und G. Böttcher, Naturwissenschaften 42, 341, 1955, Nr. 11.

Buchbesprechungen

Technische Kunstgriffe bei physikalischen Untersuchungen. Von E. v. Angerer. Zwölfte, völlig neu bearbeitete Auflage. Herausgegeben von H. Ebert. Mit 172 Textabb., VII, 464 S. Braunschweig: Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, 1959. Geb. DM 24.80.

Es erscheint müßig, dieses jedem Experimentator unentbehrliche Werk ausführlich zu besprechen. Für die Aktualität dieses in jedem Laboratorium mehrfach aufliegenden Buches spricht schon allein die Tatsache, daß innerhalb von 35 Jahren nun bereits die 12. Auflage vorliegt! Diese letzte Auflage zeichnet sich nicht nur durch einen gegen früher völlig umgearbeiteten Inhalt aus, sondern auch durch das sehr stark erweiterte Literaturverzeichnis. J. Wagner, Graz

Die Entstehung von Sternen durch Kondensation diffuser Materie. Von G. R. Burbidge, F. D. Kahn, R. Ebert, S. v. Hoerner, St. Temesváry. Mit 36 Abbildungen, VI, 330 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. DM 38.—.

Das Buch ist eigentlich das Resultat eines Preisausschreibens der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, welches auf der Hamburger Tagung im Herbst 1956 beschlossen wurde. Dabei wurde ausdrücklich eine Darstellung der verschiedenen, gegenwärtig in der Literatur vorhandenen Ansätze und Theorien, und nicht die einseitige Propagierung einer bestimmten Theorie, gewünscht. Das im vorhinein zu betonen ist notwendig, da man sonst durch den Titel des Werkes leicht zu der Annahme verleitet wird, das Buch beinhaltet eine einheitliche Theorie über die Entstehung der Sterne. Auch die in Frage kommende Thematik wurde im gewissen Sinne etwas beengt durch die Forderung, daß man sich auf die Darstellungen der Sternentstehung unter physikalischen Bedingungen beschränken soll, die von den gegenwärtigen qualitativ nicht wesentlich verschieden sind. Diese Forderung wurde bestimmt nicht ohne guten Grund gemacht. Der Fragenkomplex ist ohnehin schon sehr groß und ist im Rahmen einer solchen Arbeit kaum noch ausführlich genug zu bewältigen. Das zeigt auch der Umstand, daß im erwähnten Werk eigentlich drei vollständige Behandlungen des Problems gebracht werden, wobei jede der Arbeiten ihre spezifischen Vorzüge hat und jede von so hohem wissenschaftlichen Wert ist, daß einige Wiederholungen,die unvermeidlich in solchen Fällen auftreten, sich keineswegs störend bemerkbar machen. Allen drei Autoren wurde der ausgesetzte Preis zu gleichen Teilen zuerkannt.

Die umfangreichste und ausführlichste Arbeit ist jene von Dr. R. Ebert, Dr. S. v. Hoerner und Dr. St. Temesváry, alle drei waren eine zeitlang im Max-Planck-Institut Göttingen. Zuerst hat Dr. St. Temesváry auf eine sehr übersichtliche Art die Grundzüge und Grundprobleme der Theorie der Sternentwicklung gebracht. Sein Interesse galt besonders den verschiedenen Sternmodellen und deren Problematik. Aus diesem Beitrag sieht man schon, daß gerade dieser Teil der Astrophysik im Max-Planck-Institut seit Jahren mit besonderer Liebe gepflegt wird. An Hand der geschilderten Ergebnisse und noch ungelösten Probleme der Theorie zieht er in einer kritischen Zusammenfassung die wichtigsten Punkte zusammen und im Vergleich mit den Beobachtungen kommt er zu dem

Resultat, daß sich innerhalb der Fehlergrenzen stets eine befriedigende Übereinstimmung und nirgend ein krasser Widerspruch ergibt. Bei keinem Objekt ist es nötig aus der Theorie der Sternentwicklung ein merklich höheres Alter als $6 \cdot 10^9$ Jahre anzunehmen.

Der zweite Teil dieser Arbeit (von S. v. Hoerner) beschäftigt sich anschließend mit den dynamischen Altersangaben. Er weist darauf hin, daß von 19 untersuchten Sternhaufen 17 ein Alter zwischen 4.10^6 und 10^9 Jahren haben und nur zwei sind älter als 10^9 Jahre. Das Alter der bekannten Assoziationen liegt zwischen $0{,}4 \cdot 10^6$ und $7 \cdot 10^6$ Jahren. Weiters behandelt er die Verschiedenheit der Geschwindigkeitsstreuungen von Sternen verschiedener Spektraltypen, welche er durch zwei Altereffekte deutet. Anschließend prüft er die zeitliche Rate der Sternentstehung an Hand einer Statistik der Sterne aus der Sonnenumgebung und kommt zu dem Ergebnis, daß die Sternentstehung am Anfang nur rund eine Zehnerpotenz häufiger war als heute und ist erst in den letzten $3 \cdot 10^9$ Jahren nahezu konstant geblieben. Schade, daß man für so ein wichtiges Ergebnis nicht mehr als 391 bekannte Sterne der Sonnenumgebung zur Verfügung hat! Ähnliche Überlegungen stellt der Autor auch für die offenen Sternhaufen an und zeigt, daß etwa ein Fünftel aller Sterne in offenen Haufen und alle restlichen wahrscheinlich in Sternassoziationen entstehen. Eine interessante Untersuchung (Hoerner gemeinsam mit Temesváry) des heutigen Heliumgehaltes und der Häufigkeit der weißen Zwerge führt auch zu dem Schluß, daß die Mehrzahl der Sterne relativ früh entstanden sein muß. Am Ende diskutieren die beiden Autoren eine Reihe von Möglichkeiten der Erzeugung schwerer Elemente in den Sternen.

Im dritten Teil dieser Arbeit bespricht Dr. R. Ebert verschiedene vorhandene Ansätze zu einer physikalischen Theorie der Sternentstehung aus der Interstellarmaterie. An Hand dieser zeigt er, daß sich nur die Bildung von *O* Sternen direkt verstehen läßt, die Bildung von Sternen durchschnittlicher Maße dagegen vollzieht sich nur in größeren Gruppen oder Haufen von rund 10^3 Sonnenmassen, ganz gleich, ob sich zunächst einzelne *O* Sterne bilden oder nicht. Sehr ausführlich behandelt er auch die entscheidende Frage der Sternentstehung, nämlich jene der Drehimpulsabführung. Er zeigt, daß man sie mit Hilfe der interstellaren Magnetfelder lösen könnte.

Die Arbeit von G. R. Burbidge, in englischer Sprache, stellt eine glückliche Erweiterung und Vervollständigung der besprochenen ersten dar. Sehr ausführlich diskutiert der Autor Farbenhelligkeitsdiagramme einer Reihe offener Stern- und Kugelhaufen in bezug auf ihr Alter und eventuelle Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung. Er setzt diese Betrachtungen fort mit der Diskussion über die Unterschiede der verschiedenen Sternpopulationen und über die Spiralstruktur der Milchstraße. Auch die Sternentstehung in den uns benachbarten Spiralnebeln, wie auch die Fragen der Klassifikation und Entwicklung einzelner Spiralnebel, behandelt er sehr ausführlich mit dem nötigen Literaturhinweis.

Die dritte Arbeit von F. D. Kahn, auch in englischer Sprache, nimmt in gewissem Sinne eine mittlere Stelle zwischen den beiden schon erwähnten ein. Im ersten Teil der Arbeit bringt der Autor alle jene beobachtbaren Tatsachen, welche eine Theorie der Entstehung von Sternen berücksichtigen muß. Da ist neben den Beobachtungen über die Zeitskala auch eine ausführliche Diskussion über den Aufbau der Milchstraße. Der zweite Teil behandelt eigentlich die Entstehung von Sternhaufen und Sternassoziationen aus der interstellaren Materie. Und im dritten Teil bringt er einige Probleme aus der Entwicklung einzelner Sterne.

So ist in diesem Buche fast alles vorhanden, was man heute über die Entstehung der Sterne mehr oder weniger weiß. Die Forschung ist in diesem Bereich noch

in voller Entwicklung begriffen und das Werk, als eine „vorläufige Bilanz", wird bestimmt Wertvolles dazu beitragen. Es ist schließlich das erste Buch, welches sich — in diesem Umfange — ausdrücklich nur mit dem Problem der Sternentstehung befaßt. Die äußere Ausstattung des Buches ist, dem Springer-Verlag entsprechend, vortrefflich! K. Rakosch, Graz

Properties of Matter. Von F. C. Champion und N. Davy. 3. Auflage. Mit 167 Textabb., 334 S. London-Glasgow: Blackie & Son Limited, 1959. Geb. 40 s.

Die Verfasser versuchen in der vorliegenden Monographie, die in erster Linie für fortgeschrittene Studierende gedacht ist, durch eine Auswahl besonders wichtiger Kapitel das vielfältige Erscheinungsgebiet der Eigenschaften der Materie möglichst umfassend darzustellen. Neben der Beschreibung experimenteller Möglichkeiten tritt häufig die mathematische Behandlung des Stoffes in den Vordergrund, wobei aber besonderes Gewicht auf die physikalischen Grundlagen und Zusammenhänge gelegt wird. Der Umfang des in den einzelnen Kapiteln behandelten Stoffes geht weit über jenen der Lehrbücher herkömmlicher Art hinaus.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von den vorhergehenden nicht durch eine Änderung in der Auswahl des Stoffes, sondern dadurch, daß die Betrachtungsweise so weit als möglich von einem einheitlichen atomistischen bzw. molekularen Standpunkt aus erfolgt.

Wie bei vielen englischsprachigen Lehrbüchern findet sich auch hier am Ende eine Zusammenstellung von Aufgaben, die den Leser zu intensiverem Verarbeiten des gebotenen Stoffes anregen sollen. J. Wagner, Graz

The Numerical Treatment of Differential Equations. Von L. Collatz. Third Edition. Translated from a supplement Version of the second German edition. With 118 Diagrams and 1 Portrait. XV, 568 S. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 60. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. DM 93.60, Ganzleinen DM 98.—.

Die eben erschienene 3. Auflage in englischer Sprache stellt eine Übersetzung zur zweiten deutschen durch P. G. Williams, Teddington, England, dar. Sie unterscheidet sich von der 2. Auflage durch eine große Zahl Vereinfachungen, Ergänzungen und vor allem durch eine Erweiterung der einschlägigen Literatur. Auch neubearbeitete Beispiele sind aufgenommen worden, welche die Durchdringung des Stoffes dem Leser erleichtern. Wie bei den früheren Besprechungen so sei auch bei dieser der Wunsch ausgesprochen, daß das Werk die ihm gebührende Stellung in Fachkreisen einnehmen möge. P. Urban, Graz

Spezialröhren. Eigenschaften und Anwendungen. Von Fritz Cubasch. Mit 319 Abb., 450 S. Berlin-Borsigwalde: Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik G. m. b. H. 1960. DM 32.—.

Die erst richtig nach dem Kriege einsetzende stürmische Entwicklung der „industriellen Elektronik" ließ bald erkennen, daß die in der Rundfunktechnik üblichen Röhren für die industrielle Verwendung nur bedingt oder gar nicht brauchbar waren. Man begann langlebige, erschütterungsfeste Ausführungen zu bauen, die wegen ihrer besonderen Konstruktion natürlich auch teurer in der Herstellung wurden als die herkömmlichen standardisierten und in großen Serien erzeugten Rundfunk- und Fernsehempfängerröhren. Zählt man auch noch die Photozellen und Thyratrons hinzu, so erscheint es verständlich, daß es derzeit allein in Deutschland annähernd 500 Röhrentypen gibt, deren Anwendungsschwerpunkt auf dem Gebiet der industriellen Elektronik liegt und die man daher im Gegensatz zu Rundfunk- und Fernsehtypen unter dem Begriff „Spezialröhren" zusammenfaßt.

In dieses umfangreiche Gebiet einzuführen ist die Aufgabe, die sich der Verfasser in diesem Buche gestellt hatte. Er erläutert die wesentlichen Eigenschaften der wichtigsten Spezialröhrengruppen und gibt wertvolle Hinweise für die Dimensionierung der Grundschaltungen.

Der Stoff ist nach den wichtigsten Röhrengruppen aufgeteilt. Bei der Behandlung der Hochvakuumröhren im ersten Teil kommen die Spezialverstärkerröhren mit ihren besonderen Anwendungen zur Sprache, woran sich je ein Abschnitt über Sende- bzw. Leistungsverstärkerröhren und über Kathodenstrahlröhren anschließt. Der zweite Teil über gasgefüllte Röhren beginnt mit Gleichrichterröhren für niedrige und hohe Sperrspannungen. Dann folgen zwei Abschnitte über Thyratrons und Ignitrons. Die Kaltkathodenröhren, wie Stabilisatorröhren, Glimmrelaisröhren und Geiger-Müller-Zählrohre beschließen diesen Teil des Buches. Im dritten und letzten Teil finden sich schließlich die Hochvakuum- und gasgefüllten Photozellen.

Der Leser findet zu jeder der obigen Röhrengruppen mindestens einen typischen Vertreter mit allen technischen Daten in Form von Charakteristiken, Tabellen und Fotos aufgenommen. Es sei bemerkt, daß hier ausschließlich Typen aus dem Erzeugungsprogramm der Firma VALVO beschrieben sind, welcher Umstand aber die Allgemeingültigkeit der Ausführungen in keiner Weise verletzt. Es ist dem Verfasser in dankenswerter Weise gelungen, durch seine sorgfältig getroffene Auswahl von besonders charakteristischen Typen ein Orientierungswerk über die Technologie und Physik dieser Röhren und deren Anwendung in industrieller Elektronik und bei Sendeanlagen zu schaffen. Als besonders wertvoll werden die zahlreichen Dimensionierungsbeispiele empfunden, die es dem Konstrukteur ermöglichen, die Schaltungen kritisch zu studieren und gegebenenfalls auf andere von ihm bevorzugte Röhrentypen umzudimensionieren.

In diesem Sinne kann das Buch als voller Erfolg gewertet werden, wobei nicht zuletzt der tadellose Druck und die bewährt-vorzügliche Ausstattung durch den Verlag hervorgehoben zu werden verdienen. K. Oroszy, Graz

Oszillografen-Messtechnik. Grundlagen und Anwendungen moderner Elektronenstrahl-Oszillografen. Von J. Czech. Überarbeitete und bedeutend erweiterte Fassung von Czech: Der Elektronenstrahl-Oszillograf. Mit 636 Abb., 17 Tabellen, 684 S. Berlin — Borsigwalde: Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik GmbH. 1959. Ganzleinen DM 36.—.

Der erste Teil dieses Buches behandelt die Bauelemente des Elektronenstrahloszillographen. Das Kapitel „Aufbau und Funktionsweise der Kathodenstrahlröhre" ist eine Einführung, die auch für den Nichtfachmann sehr verständlich ist. Das Kapitel „Zeitablenkgeräte" bringt eine sehr umfassende Darstellung aller Schaltungen, von den einfachen, billigen, fast schon historischen bis zu jenen, die in komplizierten Hochleistungsgeräten gebräuchlich sind. Von diesen wird jede einzeln besprochen und ihr Funktionieren erläutert. Da immer die Oszillogramme der beschriebenen Vorgänge beigefügt sind, ermöglicht das Studium dieses Abschnittes eine gute Ausbildung im Lesen von Oszillogrammen. Das Kapitel „Messverstärker" gibt eine ganz auf die Praxis zugeschnittene Theorie mit einigen Beispielen.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der allgemeinen Messtechnik. Es werden darin die verschiedenen Methoden für Amplituden-, Frequenz- und Phasenmessung und die mathematische Auswertung der Oszillogramme gegeben. Es wird die Genauigkeit der Methoden untersucht und darauf hingewiesen, wie man diese noch verbessern kann. Es wird großer Wert darauf gelegt, zu zeigen, daß der Oszillograph nicht nur ein Gerät für qualitative Untersuchungen ist, sondern ein

Meßgerät, das bei geschickter Ausnutzung der Schaltungsmöglichkeiten an Schnelligkeit und Bequemlichkeit jedes andere Meßgerät in den Schatten stellt.

Der dritte Teil behandelt praktische Beispiele. Er ist wesentlich knapper gehalten als die vorhergehenden Abschnitte. Die Meßanordnungen werden nur im Prinzip angegeben und die Oszillogramme gezeigt. Natürlicherweise nimmt die Fernsehtechnik einen verhältnismäßig großen Anteil in Anspruch. Es kommen aber auch die anderen Gebiete, wie Aufnahme von Kennlinien, Durchlaßkurven, Hysteresisschleifen sowie die Verfolgung schneller mechanischer und optischer Vorgänge nicht zu kurz.

Der vierte Teil ist der fotographischen Registrierung gewidmet. Es gibt anfangs eine Zusammenstellung der erhältlichen Geräte. Darauf wird die fotographische Technik, die speziell bei der Aufnahme der Schirmbilder beachtet werden muß, aufgezeigt. Hier sieht man wieder die große Erfahrung des Praktikers in vielen Ratschlägen und Hinweisen.

Das Buch gewährt einen wirklich umfassenden Überblick über das Gebiet der Oszillographenmeßtechnik. Es wird dem Spezialisten als Nachschlagewerk gute Dienste leisten, besonders um der vielen Literaturhinweise willen und manche Anregungen geben. Auf Grund des Aufbaues ist es trotzdem für den Neuling, der sich nicht in Einzelheiten vertiefen will, leicht möglich, einen Überblick über die Funktionsweise und den Gebrauch des Kathodenstrahloszillographen zu erlangen. Der Druck und die Wiedergabe der Abbildungen und die sonstige Ausstattung sind vorzüglich.

B. Schnizer, Graz

Prinzipien des chemischen Gleichgewichts. Eine Thermodynamik für Chemiker und Chemie-Ingenieure. Von K. Denbigh. Autorisierte Übersetzung von H. J. Oel. Mit einem Geleitwort von W. Jost. Mit 47 Abbildungen in 50 Einzeldarstellungen und 15 Tabellen, XVIII, 474 S. Darmstadt: Dr. Dietrich Steinkopff Verlag. 1959. Geb. DM 50.—.

Das Werk von Denbigh in der dankenswerten Übersetzung von Oel bringt dem Chemiker eine vollständig abgeleitete Thermodynamik in ungewöhnlich weitem Umfange. Die Bedeutung und die Nutzlichkeit dieser Darstellung wird schon im Geleitwort von Jost betont. Überraschend ist dabei der weitgefaßte Text, einschließlich der sonst nicht immer miteinbezogenen Phasenregel und der Lösungen, was nicht nur den im Untertitel erwähnten Chemie-Ingenieuren zugute kommen wird. Die Übersichtlichkeit und Vollständigkeit der Ableitungen und Darlegungen ist vorbildlich. Bei den Entropiebeiträgen wird aber öfter gegen die am Schlusse selbst gegebene Erklärung, daß die chemischen Konstanten nur noch in alten Lehrbüchern zu finden sind, verstoßen, indem einigemale nur von Integrationskonstanten gesprochen wird. Es konnte nur ein Druckfehler bemerkt werden (S. 145), aber der Mangel in der Berücksichtigung der deutschsprachigen Literatur wiegt schwerer. Für die Anwendung im physikalischen Bereich ist der Aufbau des Stoffes auf Energie- und Entropiebeträgen vorteilhaft und die Übungsaufgaben am Ende jedes Kapitels mit ihren Lösungen im Anhang des Buches sehr wertvoll.

Auf eine Sammlung der dazugehörigen Stoffwerte wird verzichtet unter Hinweis auf entsprechende Sammlungen. Dadurch entfällt die Zusammenfassung von Ergebnissen und damit die Anwendung von graphischen Rechnungen und Darstellungen, die für eine weitere praktische Anwendung sehr nützlich wären.

Die Prinzipien des chemischen Gleichgewichtes sind aber immer anschaulich herausgearbeitet und werden dem Leser nicht nur nützliche Kenntnisse vermitteln, sondern auch das tiefere Eindringen erleichtern und sogar zu diesem anregen.

E. Schwarz-Bergkampf, Leoben

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von A. Duschek und A. Hochrainer. 1. Teil: Tensoralgebra. Vierte ergänzte Auflage. Mit 34 Abb. VIII, 171 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Steif geheftet S 144.—, DM 24.—, sfr. 24.60, $ 5.70, £ 2/1/—.

Das Erscheinen der Tensoralgebra nun in vierter Auflage zeigt deutlich, wie sehr eine gute Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung gefragt ist.

Hier werden Vektoren und Tensoren, von vornherein, durch ihre Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem angegeben. Dadurch hat man die Größen gewissermaßen gleich in der Hand und kann damit rechnen. Mathematisch erscheint das vielleicht weniger elegant, denn das Koordinatensystem ist eine sekundäre Angelegenheit, doch die sonst übliche Einführung des Vektors (von Tensoren gar nicht zu reden), der verschiedenen Operationen und Rechenregeln, die einzeln zwar trivial, zusammen aber einen komplizierten Kalkül ausmachen, stellen an das Abstraktionsvermögen des Studenten (in den beiden ersten Semestern, wo er die Vektorrechnung lernen soll, hat er es meist nicht) unnötig hohe Anforderungen.

Der vom Koordinatensystem unabhängige Sinn von Vektor und Tensor kommt, wie es der Sache angemessen ist, im Transformationsverhalten zum Ausdruck. Es ist nur von Vorteil, beizeiten mit dem Begriff der Invarianz gegen bestimmte Transformationsgruppen in Berührung zu kommen, spielen doch solche Gesichtspunkte in der theoretischen Physik eine immer wichtigere Rolle.

Wünschenswert wäre, schon in der Tensoralgebra schiefwinkelige Koordinatensysteme zu behandeln, wo sich dann mehr oder weniger zwangsläufig die Notwendigkeit zur Einführung ko- und kontravarianter Koordinaten und der beiden Maßtensoren ergibt. Im Anschluß an die reziproken Dreibeine ließe sich das leicht machen und es wäre eine Vorbereitung zur Einführung allgemeiner krummliniger Koordinatensysteme (im Teil II, Tensoranalysis), wo aber die Veränderlichkeit der lokalen Dreibeine von Ort zu Ort eine zusätzliche Komplikation bedeutet, die man bei affinen Systemen noch nicht hat.

Die Tensoren zweiter Stufe werden nach Symmetrie und Rang klassifiziert, das umfaßt alle Möglichkeiten. Bezeichnungsexzesse wie in der älteren (meist technischen) Literatur gibt es dann nicht mehr.

Ein Nachteil der tensoriellen Schreibweise ist ihre Schwerfälligkeit. Man geht erfahrungsgemäß, wenn man den Kalkül einmal begriffen hat, für die Zwecke der Vektorrechnung schließlich zur symbolischen Schreibweise über, verwendet diese sozusagen als Kurzschrift. Jetzt wird das noch erleichtert, in der vierten Auflage sind mehr Brücken zur symbolischen Vektorrechnung eingebaut. (Die einzige wesentliche Änderung gegenüber früheren Auflagen). Das soll aber nicht heißen, daß das Buch so seine eigentliche Absicht und sein Ziel verfehlt hätte, für komplizierte Probleme ist und bleibt die Tensorschreibweise allein sinnvoll, und den allgemeinen Tensorkalkül hat man nach Durcharbeiten des Buches gelernt.

H. Neuer, Graz

Die geschichtliche Entwicklung der Hörprüfungsmethoden. Kurze Darstellung und Bibliographie von den Anfängen bis zur Gegenwart. Von H. Feldmann. Geleitwort von W. Kindler. Mit 40 Abb., XI, 92 S. [Zwanglose Abhandlungen aus dem Gebiet der Hals-Nasen-Ohren-Heilkunde: Heft 5]. Stuttgart: Georg Thieme-Verlag. 1960. Kart. DM 19.80.

Das flüssig geschriebene Buch von Feldmann bringt in klarer und einprägsamer Art die Entwicklung der verschiedenen Hörprüfungsmethoden und ihrer Hilfsmittel. Nach einem Abschnitt über die Diagnostik von Hörstörungen in Altertum und Mittelalter leitet es über zur Entdeckung der Knochenleitung und

ihre diagnostische Bedeutung. Die Entwicklung der Hörprüfung mit Tönen und Geräuschen wird in Unterabteilungen über mechanische Akkumeter, die klassischen Stimmgabelprüfungen, über obere und untere Tongrenze, kontinuierliche Tonreihe, mechanische und elektrische Schallquellen konstanter Intensität und Audiometer mit Elektronenröhren eingehend geschildert. Im nächsten Kapitel werden die Methoden der Tonaudiometrie seit ihren Anfängen bis heute behandelt und im einzelnen auf die Schwellenaudiometrie, Vertäubung und schalldichte Untersuchungsräume, die graphische Darstellung der Meßergebnisse und ihre Standardisierung, die spezielle Audiometrie des Schallleitungsapparates, das Recruitment, Adaptation und Hörermüdung, Schwebungen und inadaequate Reizung der Hörnerven, Simulationsproben, objektive Audiometrie und Kinderaudiometrie behandelt. Der letzte Abschnitt ist den Grundlagen und der Technik der klassischen und modernen Sprachgehörsprüfung gewidmet.

Das Buch gibt nicht nur in klarer Form einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung und den heutigen Stand der Audiologie, sondern bringt auch manche alte, längst vergessene Beobachtung oder Erkenntnis ans Licht, die heute wieder neu aufgegriffen, sehr aktuell sind. Das Buch ist daher jedem mit der Audiologie Beschäftigten, gleichgültig ob Arzt, Physiker oder Biologe, warmstens zu empfehlen.

W. Messerklinger, Graz

Physikalisch-Chemisches Rechnen in Wissenschaft und Technik. Von H. Fromherz. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 43 Abb., XV, 338 S. Weinheim Bergstr.: Verlag Chemie, GMBH. 1960. Ganzleinen DM 32.50.

Vielfach besteht noch eine unbegründete Abneigung gegen die Anwendung physikalisch-chemischer Formeln in der Praxis. Das vorliegende Buch ist bestens geeignet, diesem Übelstand entgegenzuwirken. Die zahlreichen mit Bedacht ausgewählten Rechenbeispiele umfassen praktisch das gesamte Gebiet der physikalischen Chemie und stellen so gleichzeitig eine Art Repetitorium dar. Die Erklärungen sind so gehalten, daß sie die Problemstellung klar hervortreten lassen und zu eigenem Mitdenken anregen.

Das Buch kann dem Studierenden, sowie dem in Wissenschaft und Praxis Tätigen bestens empfohlen werden.

G. Porod, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. Flügge. Mitherausgeber C. Truesdell. Band VIII/1: Strömungsmechanik I. Mit 186 Figuren, 471 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 132.— (Bei Verpflichtung zur Abnahme des ges. Handbuches Subskriptionspreis DM 105.60).

Nunmehr liegt Band VIII/1 des Handbuches der Physik vor, der der Strömungsmechanik gewidmet ist. Er umfaßt vier größere Artikel.

Der erste, welcher die physikalischen Grundlagen der Strömungslehre behandelt, stammt von K. Oswatitsch und bringt eine möglichst allgemeine Darstellung der gegenwärtig interessierenden, im allgemeinen kompressiblen Strömungen. Den Ausgangspunkt bilden die Grundgleichungen in Form von Integralsätzen; zur Beschreibung der Teilchenbewegungen wird die Lagrange-Darstellung bevorzugt. Die verschiedenen Strömungstypen wurden sehr übersichtlich eingeteilt und klassifiziert, wobei einige Beispiele zur Förderung der Anschaulichkeit eingestreut wurden. Der letzte Abschnitt befaßt sich mit Instabilitäten und Turbulenz und bringt in ziemlich ausführlicher Weise alles Wissenswerte über die Strömungsgleichungen, die Energiegleichung der Nebenbewegung, sowie über ebene und räumliche Instabilitäten.

Der zweite Artikel behandelt die mathematischen Prinzipien und wurde von J. Serrin verfaßt. Er soll das mathematische Rüstzeug für den auf diesem Gebiet

arbeitenden Physiker liefern. Daher findet man hier auch die allgemeinen Variationsprinzipien, die Gleichung für den Energie- und Impulstransfer und vieles mehr. Besonders gelungen findet der Referent den Abschnitt D, der sich mit der Thermodynamik und den Energiegleichungen befaßt. Abschnitt E behandelt das vollkommene Gas in sehr moderner Weise. Es werden Ähnlichkeitssätze der dynamischen Gleichungen bzw. Kontinuitätsgleichungen aufgezeigt, welche besonders für den konstruierenden Ingenieur von Bedeutung sein können. Aber auch die speziellen Methoden zur Behandlung zweidimensionaler Strömungen bringen eine sehr in die Tiefe gehende Darstellung mit zahlreichen instruktiven Beispielen. Die letzten Abschnitte sind den Stoßwellen und den viskosen Flüssigkeiten gewidmet und bringen eine ausgezeichnete tensorielle Darstellung, die den Vorteil großer Übersichtlichkeit mit großer Allgemeinheit verbindet. Eine ausgezeichnete bibliographische Übersicht ermöglicht eine Vertiefung der Kenntnisse in speziellen Richtungen.

Der dritte Artikel behandelt die laminare Strömung und wurde von L. Howarth verfaßt. Den Ausgangspunkt bilden die Arbeiten von Prandtl im Jahre 1904, die zum Symbol für die Größe der Schule Göttingen geworden sind. Zuerst wird das zweidimensionale Problem behandelt und die exakten Lösungen aufgestellt. Hiebei werden auch sehr praktische Näherungsverfahren erörtert, wobei speziell die von Kármán und Pohlhausen eine wichtige Stellung einnehmen. Daran schließt sich die Behandlung der dreidimensionalen Fälle, sowie die hiezu nötigen Näherungsverfahren. Auch dieser Artikel zeichnet sich durch große Prägnanz und Klarheit aus.

Der letzte Artikel ist der Entstehung der Turbulenz gewidmet und stammt von H. Schlichting. Er bringt nach einer kurzen Übersicht über die experimentellen Ergebnisse bei dem Umschlag laminar-turbulent zuerst die Grundlagen der Stabilitätstheorie der Laminarströmung und dann die Ergebnisse dieser Theorie für die Grenzschicht an ebener Platte und schließlich den Vergleich der Stabilitätstheorie mit Versuchsergebnissen. Die verschiedenen Einflüsse auf den Umschlag werden in mehreren Abschnitten ausführlich behandelt und an wunderbaren Aufnahmen erläutert. Den Schluß bildet die Behandlung der Stabilität gegen dreidimensionale Störungen und der Einfluß der Wandrauhigkeit.

Die große Fülle des Gebotenen zwingt den Referenten nur Einzelnes herauszugreifen und zu besprechen. P. Urban, Graz

Begründung der Funktionentheorie. Auf alten und neuen Wegen. Von L. Heffter. Zweite, wesentlich verbesserte Auflage. Mit 13 Abb., VIII, 64 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. DM 19.80.

Sinn dieses Büchleins ist es nicht, Funktionentheorie zu treiben, sondern nur sie zu begründen, das heißt die verschiedenen Wege aufzuzeigen, auf welchem man zur analytischen Funktion und ihrer Potenzreihenentwicklung gelangt; ein gewiß ganz reizvolles Thema. Es bringt im ganzen sechs verschiedene Wege und ihre Untervarianten in historischer Entwicklung. Darunter stammen eine neue einfache Gestalt (1954) des Weges von Looman-Menchoff (1933) sowie zwei neue Wege, über die eindeutige Integrierbarkeit (1936) und mit Hilfe von Polarkoordinaten (1951) vom Verfasser selbst. Damit ist dem nun schon so hochbetagten Verfasser wieder eine glänzende Darstellung von Früchten seines reichen Wirkens gelungen, das die Umwelt dankbar hinnehmen wird. — Gegenüber der ersten Auflage von 1955 wurde besonders der Paragraph über das bestimmte Integral im Einleitungsabschnitt ausgebaut, dafür wurden an manchen Stellen entbehrliche Absätze weggelassen, so daß der Umfang des Werkes fast nicht gestiegen ist. A. Aigner, Graz

Drei Bilder der Mechanik. Von H. Hertz. Bd. 7 der Schriftenreihe „Physikalische Schriften", herausgegeben von E. Brüche. 57 S., 1 Abb., Mosbach/Baden: Physik Verlag, 1959. Brosch. DM 5.80.

Heft 7 der „Physikalischen Schriften" behandelt 3 Bilder der Mechanik und stellt eine Einleitung zu dem berühmten Werk „die Prinzipien der Mechanik" von Heinrich Hertz dar. Hört man den Namen von H. Hertz, so denkt man an die großen Entdeckungen auf dem Gebiete der Elektrodynamik und im besonderen der elektromagnetischen Wellen. Hertz hat aber auch die Prinzipien der Mechanik in sehr origineller Weise untersucht. Durch seine Darstellung auf diesem Gebiet, kann er als Wegweiser der modernen Physik bezeichnet werden. Er gelangte durch seine originelle Betrachtungsweise auf einen neuen Weg zur Hamilton'schen Theorie der Mechanik. Die Weiterverfolgung dieser Analogie hat schließlich Schrödinger zur Schöpfung seiner Wellenmechanik geführt.

P. Urban, Graz

Die Bildungsfunktion des Physikunterrichtes. Von E. Hunger. 75 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1959. Brosch. DM 5.80.

Die Broschüre wurde auf der Jahrestagung des Westdeutschen „Fördervereines" 1959 in Würzburg unter den Beiträgen zum Thema „Die Stoffauswahl im naturwissenschaftlichen Unterricht der höheren Schulen" mit dem ersten Preis ausgezeichnet. Sie geht von der Tatsache aus, daß für den heutigen Physikunterricht ein Übermaß an interessanten und lebenswichtigen Aufgaben einem Mangel an Unterrichtszeit gegenübersteht. Wenn daher zur Beseitigung der Überlastung eine gründliche Sichtung und Lichtung nötig wird, ist es wünschenswert, daß diese nach einem wohldurchdachten Plan erfolgt. Der Verfasser schlägt als Leitgedanken zur Auswahl und Abgrenzung des Lehrstoffes dessen Bildungsfunktion vor und führt dies genauer aus. Nicht die Erklärung einer großen Menge von Erscheinungen aus unserer physikalischen und technischen Umwelt sondern die Besinnung auf das Wesen und die Grenzen der physikalischen Erkenntnis scheinen ihm in erster Linie wichtig. Zur Stoffauswahl bringt er ganz konkrete Kürzungsvorschläge vor allem für die Oberstufe. Sie unterscheiden sich von unseren bisherigen Gepflogenheiten einerseits dadurch, daß die Behandlung der experimentellen Tatsachen und technischen Anwendungen mehr der Unterstufe zugeschoben wird, so daß die Oberstufe Zeit gewinnt, aus den abschließenden Theorien ein physikalisches Weltbild zu entwickeln. Anderseits will er einen Mindestlehrstoffplan durch „funktionelle Bildungsziele" ergänzt wissen: die Entwicklung der Denkfähigkeit an physikalischen Arbeiten.

Für realistisch eingestellte Menschen dürften Ideen und Ausdrucksweise an manchen Stellen etwas zu philosophisch erscheinen. Daneben aber bietet die Schrift eine große Menge vorzüglicher Gedanken und kann die Auseinandersetzung damit jedem Physiklehrer sehr empfohlen werden. E. Weinmeister, Graz

Studies in Crystal Physics. Von M. A. Jaswon. Mit 63 Abb., 42 S. London: Butterworths Scientific Publications. 1959. £ —/10/6.

In diesem Heft sind vier in Research Bd. 11 (1959) veröffentlichte Arbeiten zusammengestellt, welche einige wichtige Fragen der Kristallphysik wie Kristallbaufehler, Röntgenstrahlenbeugung an nichtidealen Kristallen, Interferenzlinienverbreiterung als Folge eines Teilchengrößeneffektes bzw. durch plastische Verformung und des Mechanismus der polymorphen Umwandlung von Metallen betreffen. Gewissermaßen als Abrundung werden in einem fünften Aufsatz die thermodynamischen Grundlagen der vorgenannten Erscheinungen erörtert.

F. Lihl, Wien

Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. Von H. KADEN. Zweite vollkommen umgearbeitete Auflage von: Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik. ((Technische Physik in Einzeldarstellungen: Band 10.) Mit 195 Abbildungen, XV, 354 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. — München: J. F. Bergmann. 1959. Ganzleinen DM 66.—.

Die vorliegende umgearbeitete Auflage trägt im weiten Maße der in der Zwischenzeit erfolgten Weiterentwicklung der Hochfrequenztechnik Rechnung. Für die Gründlichkeit, mit der die Probleme behandelt werden, zeigt die Verarbeitung von cca. 60 im Literaturnachweis angeführten einschlägigen Arbeiten, neben jenen, die aus der eigenen langjährigen Erfahrung des Verfassers resultieren.

Nach den für die Behandlung allgemeiner Wirbelstrom- und Schirmungsfragen notwendigen Grundlagen, ausgehend von den beiden MAXWELLschen Differentialgleichungen (Durchflutungssatz und Induktionsgesetz), werden systematisch die einschlägigen Probleme behandelt. Für Nachrichtentechniker sind insbesondere die Kapitel über „Metallische Hüllen mit innerer Felderregung", also die Behandlung von verschiedenen Kabeltypen für Fernverbindungen, interessant. Hier ist dem Verfasser besonders für die instruktiven Tabellen mit den errechneten Leitungs- und Übertragungskonstanten für größere Frequenzbereiche zu danken.

Einem breiten Raum sind Kopplungsprobleme im Zusammenhang mit Nebensprechfragen bei koaxialen Leitungen gewidmet. Diese Fragen wurden ja vom Verfasser schon seit Jahrzehnten bahnbrechend behandelt. (z. B. Siemens Veröffentlichungen aus dem Gebiete der Nachrichtentechnik 1936). Das Kapitel über die Schirmwirkung von Drahtgittern ist auch für die moderne Elektronik, wie sie z. B. das Fernsehen benötigt, — Konstruktion von Fernsehröhren — sehr wichtig. Durch die Berücksichtigung der Nähewirkung der Gitterdrähte wurde die Gültigkeit der Formeln beträchtlich nach engen Gittermaschen hin erweitert.

Das Kapitel über Rück- und Schirmwirkung metallischer Hüllen gegen elektromagnetische Wellen erstreckt sich nunmehr universeller auch auf nichtquasistationäre Vorgänge. Dadurch können Hohlraum- und Hohlleiterprobleme unter Berücksichtigung von E und H-Wellen behandelt werden.

Äußerst günstig wirkt sich die Ergänzung jedes Kapitels durch praktische Beispiele aus.

Das vorliegende Buch kann als Schlüsselwerk für alle Physiker und Techniker gelten, die sich im zunehmenden Maße mit Problemen der Leitungs- und Übertragungstechnik bei höheren Frequenzen beschäftigen müssen. Aus ihm erhält man einen überdurchschnittlichen vollständigen Querschnitt durch alle jene Probleme, die den Nachrichten- und Hochfrequenztechniker in seinem Berufsleben begleiten.

G. GOBIET, Graz

Electron Physics. The Physics of the Free Electron. Von O. KLEMPERER. Mit zahlreichen Textabb., XI, 248 S. London: Butterworths Scientific Publications. 1959. 32s.6d.

Es bedarf wohl keines Hinweises, daß O. KLEMPERER, von dem zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiet der Elektronenphysik bekannt sind, in besonderer Weise als Verfasser eines solchen Buches geeignet erscheint. Electron Physics stellt eine Erweiterung von Vorlesungen dar, die der Verfasser an der Universität London gehalten hat. Daraus erklärt sich auch der fast ausschließlich einführende Charakter des Buches, wobei betont werden muß, daß sowohl Stoffauswahl und Aufbau in einer sehr glücklichen Weise vorgenommen wurden.

Der Teil 1 beschäftigt sich mit den Kathodenstrahlen und damit verbundenen Problemen; also etwa ihre Erzeugung oder die Bewegung der Elektronen in den verschiedensten Feldern, wobei auch ganz kurz auf die Streuung an Kernen und die LARMOR-Präzession eingegangen wird. Die wesentlichen Fragen der Elektronenoptik und der Raumladungsprobleme werden in einen, dem Zweck des Buches entsprechenden Ausmaß behandelt. Der Teil 2 beschäftigt sich mit den Eigenschaften des Elektrons. Ausgehend von den verschiedenen Möglichkeiten der Bestimmung der Elektronenladung, wird auf die Messung des e/m-Wertes eingegangen und unter anderem auch die Frage der elektromagnetischen Masse des Elektrons behandelt. Darauf folgt eine kurze Einführung in die Wellennatur dieses Teilchens und ausschließlich damit zusammenhängende Fragen sowie die Behandlung des Elektronenspin und des magnetischen Moments. An jedes Kapitel schließt sich eine Liste entsprechender, verständlicher Weise fast ausschließlich englisch geschriebener Literatur zum genaueren Studium der behandelten Fragen. Ebenso ermöglichen die am Kapitelende angeführten Aufgaben ein besseres Verständnis des Stoffes.

Damit kann das vorliegende Buch als Einführung in die Physik des freien Elektrons jedem Studierenden wärmstens empfohlen werden. Darüber hinaus verspürt man den Wunsch, verschiedene daran angeschnittene Gebiete vom Verfasser ausführlicher und in einer nicht mehr nur einführenden Art behandelt zu sehen, wie es etwa in der Elektronenoptik schon geschehen ist.

N. PUCKER, Graz

Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen. Herausgegeben von MEYER-EPPLER. Band I: Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie. Mit 178 Abb. und 1 Tafel. XVIII, 446 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 98.—.

Der vorliegende erste Band der Reihe „Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen" ist den Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie gewidmet. Diese war zuerst die Schöpfung von Mathematikern, wie FISHER, SHANNON und WIENER, wurde aber in kurzer Zeit auf die verschiedensten Gebiete übertragen, wie Biologie, Nachrichtentechnik, Philosophie etc. Das erschienene Werk behandelt die Informationstheorie im Sinne der Bedeutung des Wortes „Information" in der Umgangssprache. Dabei wurde durch exakte Definition aller Begriffe dafür gesorgt, daß der mathematische Aufbau auf solide Grundlage gestellt wird. Nach einer Betrachtung über die menschliche Kommunikationskette (Kap. 1) werden im Kap. 2 die meßbaren Eigenschaften der für den Zeichenverkehr notwendigen Signale behandelt, sowie die Frage geeigneter Übertragungssysteme (Kap. 3), die Statistik der hierbei verwendeten stereotypen Signalformen („Symbole") (Kap. 4) und der Einfluß von Störungen auf die Ermittlung der Signale (Kap. 5) erörtert. Das Kap. 6 ist den möglichen Sicherungen gegen Übertragungsfehler gewidmet, während in Kap. 7 der Empfang von Signalen etc. behandelt wird. Als wichtigste Zeichenträger erörtert das Kap. 9 die akustischen und optischen Valenzklassen und liefert so den Zugang zur höchsten Stufe menschlicher Verständigung, zur sprachlichen Kommunikation. Das letzte Kap. 10 ist der tatsächlichen Sprachübermittlung gewidmet.

Zahlreiche Hinweise ermöglichen das Studium der einzelnen Kapitel, unabhängig von den anderen. Das Sachverzeichnis wurde durch Hinzufügung einzelner Fachausdrücke ergänzt, was das Eindringen in die vorwiegend englische Literatur erleichtert. Das Buch ist jedem auf dem Gebiete der Informationstheorie Tätigen wärmstens zu empfehlen.

P. URBAN, Graz

Die Fernrohre und Entfernungsmesser. Von A. König und H. Köhler. Dritte, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 471 Abb., VIII, 476 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 88.—.

Die dritte von H. Köhler in vielen wesentlichen Teilen neubearbeitete Auflage des bekannten Buches von Albert König gliedert sich in drei, sehr ungleiche Teile: A. Die Fernrohre (343 S.), B. Die Mikrometer (14 S.) und C. Die Entfernungsmesser (68 S.).

Im ersten Abschnitt des ersten Teiles werden zunächst die theoretischen Grundlagen, angefangen von den Grundzügen der Gaussschen Dioptrik bis zu den Eigenschaften des Auges und dem räumlichen Sehen behandelt. Der Paragraph 2 ist etwas *zu* knapp gehalten. So wäre es für einen Anfänger wichtig zu erfahren, daß die Radien der optischen Kugelflächen vom Scheitel zum Mittelpunkt hin orientiert werden und ihnen danach das Vorzeichen zugeordnet wird. In der Figur 18, Seite 25, sind die Brennweiten f_1' und f_2' falsch angegeben, so daß sich Widersprüche der anderen Daten mit den Formeln ergeben. Durch die konzentrierte Form ist in diesem Kapitel ein großes Gebiet sehr übersichtlich behandelt.

Im zweiten Abschnitt über die konstruktive Gestaltung der Fernrohre fallen drei sehr wertvolle Tabellen auf, welche die wichtigsten Objektiv-, Okular- und Zwischenoptik-Systeme samt allen zugehörigen Daten und Leistungsangaben enthalten. Sodann wird ausführlich über die Gestaltung der Fernrohre von den Handfernrohren bis zu den größten astronomischen Teleskopen berichtet. Ausgezeichnete Abbildungen machen diesen Teil zu einem vortrefflichen Nachschlagewerk über die verschiedensten Verwendungsmöglichkeiten solcher Geräte.

Gleich wichtig für die Fertigung wie für die Verwendung der Fernrohre ist ihre Prüfung. Der dritte Abschnitt des Teiles A behandelt diese Frage und schildert die wichtigsten Prüf- und Meßmethoden.

Der Teil B über die Mikrometer wurde unverändert aus der zweiten Auflage übernommen. Im dritten Teil über die Entfernungsmesser sind die technischen Neuerungen seit der zweiten Auflage berücksichtigt. Auch hier wird das Verständnis des Textes durch eine große Anzahl ausgezeichneter Abbildungen erläutert.

Im Anhang sind die wichtigsten Formeln der Gaussschen Dioptrik und die lichttechnischen Einheiten zusammengestellt. Ferner ist da ein kurzer Abriß über die Geschichte des Fernrohres gegeben. Drei Seiten sind der Würdigung des ersten Verfassers Albert König gewidmet.

Das Buch ist hervorragend ausgestattet und alle zahlreichen Abbildungen von vorzüglicher Qualität. Es muß jedem an der Verwendung von Fernrohren Interessierten als wertvolles Nachschlagebuch empfohlen werden, Studierenden als knappgefaßte und doch exakte Einführung in das reizvolle Gebiet.

O. Mathias, Graz

The Lloyd William Taylor Manual of Advanced Undergraduate Experiments in Physics. Herausgegeben von der American Association of Physics Teachers. Mit 244 Textabb., 550 S. Reading (Mass.)-London: Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1959. Geb. $ 9.50, 72s.

Die Vereinigung der amerikanischen Physiklehrer hat dem Andenken Lloyd William Taylors ein Handbuch über physikalische Experimente für fortgeschrittene Studierende gewidmet. Das Werk, welches eine Sammlung einer großen Zahl von Experimenten aus allen Teilgebieten der Physik enthält, ist keine Anleitung für das experimentelle Arbeiten für Studierende, sondern ein Nachschlagwerk für den Lehrer. Bekannte Versuche sind kurz referiert und nur neue ausführlicher behandelt. Allerdings gibt ein sehr umfangreiches Literaturverzeichnis

am Ende jedes Kapitels die Möglichkeit, sich über alle Einzelheiten der angeführten Versuche zu informieren.

Die Experimente sind im allgemeinen so gewählt, daß ihre Ausführung keine übermäßigen Anforderungen an die apparative Ausrüstung stellt.

Jeder Praktikumsleiter wird in diesem Handbuch viele wertvolle Hinweise und Anregungen finden.

Erwähnenswert ist noch die hervorragende Ausstattung und Aufmachung des Buches.

J. Wagner, Graz

Die physikalische Erkenntnis und ihre Grenzen. Von Arthur March. 2., überarbeitete und ergänzte Auflage von F. Cap. VIII, 121 S. (Die Wissenschaft: Band 108). Braunschweig: Friedrich Vieweg u. Sohn. 1960. Halbleinen mit Schutzumschlag DM 10.80.

Die eben erschienene 2. Auflage des bekannten Buches von Arthur March, wurde von Prof. Cap, Innsbruck, überarbeitet und erweitert. Dabei wird in zwei neu aufgenommenen Kapiteln auf die nichtlineare Feldtheorie Heisenbergs, sowie auf das Problem der Paritat eingegangen. Die Verfasser geben somit einen klar verständlichen Einblick in den heutigen Stand der Physik.

P. Urban, Graz

Hyperonen und K-Mesonen. Von M. A. Markow. Monographien der experimentellen und theoretischen Physik. Mit 41 Abb. 328 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1960. Leinen DM 42.80.

Das im Rahmen der Monographien der experimentellen und theoretischen Physik erschienene Buch des bekannten Autors M. A. Markow stellt eine Übersetzung aus dem Russischen dar und bringt die grundlegenden experimentellen Tatsachen unserer neueren Erkenntnisse über die Elementarteilchen. Dabei wird auch auf die verschiedenen Theorien in der Physik der letzten Jahre eingegangen. Da bekanntlich unsere heutigen theoretischen Erklärungen auf diesem Gebiete nicht vollständig sind, ihre Kenntnisse aber zumindest als ordnendes Prinzip notwendig sind, so ist eine solche Darstellung von großem Vorteil, geht der Verfasser doch über den Rahmen einer bloßen Zusammenfassung der derzeitigen Erfahrungen weit hinaus. Es wird dabei der historische Gesichtspunkt gewahrt, wodurch die Zuverlässigkeit der Betrachtung gesichert erscheint. Es gelingt dem Verfasser, die Theorie der schwachen Wechselwirkung von einem logischen Gesichtspunkt aus darzustellen. Die seit dem Erscheinen der russischen Ausgabe gemachten Entdeckungen wurden durch Anmerkungen und Zusatze in der deutschen Ausgabe berücksichtigt. Für den an der Peripherie der Wissenschaft arbeitenden theoretischen Physiker sowie den Experimentalphysiker stellt das Werk einen wertvollen Behelf dar.

P. Urban, Graz

Methods of Experimental Physics. Herausgegeben von L. Marton. Vol. 1: Classical Methods. New York and London: Academic Press. 1959. $ 12.80.

Das vorliegende Buch ist das erste einer Reihe von Bänden, welche die Methoden der experimentellen Physik auf den verschiedenen Gebieten darstellen soll. Der von ihnen zu behandelnde Stoff wurde unterteilt in: Klassische Methoden, Elektronische Methoden, Molekularphysik, Atom- und Elektronenphysik, Kernphysik und Festkörperphysik (2 Bände). Zur Abfassung dieser Buchreihe wurden zuvor einige Richtlinien aufgestellt, die einen gewissen Einblick in den Charakter des Werkes gestatten. So die Forderung, dem auf dem eigenen schmalen Spezialgebiet bis in die äußersten Details bewanderten Experimentator in schneller Weise einen Überblick über experimentelle Methoden benachbarter Gebiete zu

verschaffen. Oder der Wunsch, daß nicht ausschließlich Meßtechniken beschrieben werden sollten, noch nur Instrumente mit ihrem Arbeitsprinzip angeführt werden. Vielmehr soll dem einem der vorliegenden Gebiete fernerstehenden Physiker ein kurzer und klarer Überblick über die verwendeten Methoden, ihren grundsätzlichen Charakter und eventuell auch ihre quantitative Reichweite gegeben werden.

Der vorliegende Band beschäftigt sich mit den Stoffgebieten der „Klassischen Physik", soweit sie von allgemeinen Interesse sind. Am Beginn steht ein grundsätzlicher Beitrag über die Auswertung von Messungen sowie über Fehlermöglichkeiten bei direkten und indirekten Meßmethoden. Daran schließt sich ein Abschnitt über die Fundamentaleinheiten und Konstanten sowie die diesbezüglichen Meßmethoden. Darauf folgen die Mechanik der Flüssigkeiten und Festkörper sowie Akustik, Wärme und Thermodynamik, Optik und Elektrizität. Auf die einzelnen Details bei der Behandlung dieser Gebiete einzugehen hat bei der Fülle dessen, was dabei erwähnt werden müßte, wohl wenig Sinn. Doch könnte man einen Vergleich mit der „Praktischen Physik" von F. Kohlrausch anstellen, der geeignet erscheint die wesentlichen Züge des Buches noch etwas mehr zu erhellen. Es fällt dabei auf, daß die „Praktische Physik" bei den einzelnen Meßmethoden und Untersuchungstechniken wesentlich mehr ins Detail geht. Sie hat im meßtechnischen Sinn weit stärkeren Handbuchcharakter als das vorliegende Buch, in dem meist nur der prinzipielle Weg der Methode skizziert ist und man bei weiteren Fragen auf die entsprechende Literatur verwiesen wird. Dagegen wird vielleicht — und das durchaus im eingangs erwähnten Sinn der Herausgeber — manchmal mehr auf die theoretischen Hintergründe eingegangen um ein entsprechend verständnisvolles Auswerten der Messungen zu gewährleisten. Kohlrausch dagegen setzt beim Benützer wiederum eine größere Vertrautheit mit den Grundlagen der verschiedenen Gebiete voraus.

In diesem Sinn sind also, soweit man es auf Grund des vorliegenden Bandes beurteilen kann, beide Werke keine Konkurrenz, sondern ergänzen einander eher und man kann auf die weiteren Bände sehr gespannt sein. Druck und äußere Form sind in der beim Verlag gewohnten Weise ausgezeichnet. N. Pucker, Graz

Absolute Analysis. Von F. und R. Nevanlinna. Mit 4 Abb., VIII, 259 S. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 102.] Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 39.—.

Es gibt wohl kaum eine moderne Darstellung der koordinatenfreien Funktionalanalysis, welche, durch geschickte Bescheidung nicht zu umfangreich, auf verschiedene Bedürfnisse der Theorie und Anwendung ausgleichend bedacht, zusammenhängend lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen und Differentialgeometrie wiedergibt wie dieses Werk. Allerdings beschränkt es sich dabei im wesentlichen auf endlich-dimensionale Räume; darin trägt die absolute Analysis meist rein affinen Charakter. Selbstverständlich handelt es sich um kein elementares Lehrbuch; um die Feinheiten erwägen und ermessen zu können, die im Unterschied gegenüber der klassischen Koordinatendarstellung liegen, muß man mit dieser schon gut vertraut sein. — Besonders an zwei Stellen der Differentialrechnung zeigen sich deutlich die Vorteile der koordinatenfreien Methode: bei den Sätzen über die Vertauschbarkeit der Ableitungen und bei der Theorie der impliziten Funktionen. Bei der Integralrechnung liegt der Schwerpunkt in der Integration eines schiefsymmetrischen Tensorfeldes. Auch innerhalb der Differentialgeometrie ist das Hauptgewicht auf die Tensorrechnung gelegt, welche wiederum koordinatenfrei entwickelt wird, wodurch sich die üblichen Symbole bedeutend vereinfachen und die vielen Indizes entbehrlich werden. Die Abstraktion wird aber andererseits nicht so weit getrieben

wie etwa in den Werken von Bourbaki. Dies bedeutet ein erfreuliches Entgegenkommen an die Anwendung; und somit dürfte mit dem modifizierten Kalkül nicht nur dem Mathematiker, sondern auch dem theoretischen Physiker gedient sein.

A. Aigner, Graz

Nuclear Power, Year Book 1960. 3. Jhrg. Edited by W. Caldwell Davidson 537 S. MSc (Eng.), Dic. London: Rowse Muir Publications LTD. 1960. £ 2. 12s. 6d.

Ein kombiniertes Nachschlag- und Adressenbuch. Dies geht aus dem Inhalt der einzelnen Kapitel noch klarer hervor:

I Review Section: Ein Überblick über die im vergangenen Jahr auf dem Gebiete der Kernphysik im allgemeinen und von den einzelnen Firmen und Institutionen in England durchgeführten Arbeiten. Bei den einzelnen Gruppen ist angeführt, welche Aufgaben ihnen gestellt wurden, wer der Chef ist und die notwendigen Adressen.

II World Authorities: Etwas kürzer gefaßt als vorhin die Aufgaben und Zusammensetzung der Organisationen nach Ländern geordnet, beginnend mit den internationalen Institutionen.

III Technical Section: Eine Formel- und Wertesammlung für Reaktorfragen.

IV Isotopes: Eine Zusammenstellung derselben, sowie Hinweise auf Erzeugerfirmen und Vorschriften für deren Verwendung.

Die restlichen Abschnitte betreffen wieder nur England: V Company Adresses, VI Buyers Guide, VII Trade Names und VIII Who's Who.

H. Zingl, Graz

Nukleonik. Schriftleitung: A. Boettcher und W. Finkelnburg, herausgegeben unter der Mitarbeit von zahlreichen Fachgelehrten. Band I, Heft 6 und 9. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzelnen berechneten Heften. Heft 6: DM 8.—, Heft 9: DM 9.90.

Die seit 1958 im Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, erscheinende Zeitschrift Nukleonik, hat vor kurzem ihren ersten Band abgeschlossen. Wir wollen dies zum Anlaß nehmen, diese Zeitschrift zu besprechen. Schon die Namen der Herausgeber und der Schriftleitung zeigen, da es sich, besonders für die deutsche Literatur, um eine hervorragende und wichtige Neuerscheinung handelt, die den modernsten Ansprüchen gerecht wird. Dies geht besonders aus Heft 6 hervor, in welchem man einen gelungenen Querschnitt durch alle derzeit brennendsten Probleme feststellen kann. So werden z. B. die Neutronenspektren in heterogenen Plattenreaktoren von W. Häfele behandelt, welcher den Flußverlauf während des Bremsvorganges als Funktion des Logarithmus der Energie in einem Plattenreaktor nach analytischen wie auch numerischen Methoden beschreibt. Dann findet man einen sehr lesenswerten Artikel über den Schnellspaltungsfaktor und die Stoßwahrscheinlichkeit in moderatorgefüllten Uranrohren, wobei besonders statistische Methoden zur Berechnung herangezogen werden. Auch diese Arbeit stammt aus dem Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik der Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H., Karlsruhe und wurde von Herbert Rief verfaßt. Aus dem gleichnamigen Institut stammt auch der Beitrag über Resonanzeinfang von Neutronen in heterogenen Systemen von Gerd Bläsßer.

Aber nicht allein das deutsche Sprachgebiet kommt hier zu Wort; im Sinn einer richtigen internationalen Zusammenarbeit finden wir auch zahlreiche ausländische Arbeiten. So eine über die Neutronen-Transporttheorie von G. Kosaly und eine über das zeitliche Verhalten der Abbremsung der Neutronen in schweren Moderatoren vom gleichnamigen Autor, aus dem zentralen Forschungsinstitut

in Budapest. Überblickt man die Reihe der erschienenen Arbeiten, so kann man mit Vergnügen feststellen, daß auch auf diesem, bei uns etwas zurückgebliebenen Fachgebiet wieder viel aufgeholt wurde und durch Herausgabe dieser Zeitschrift allen einschlägigen Fachkollegen ein würdiges Organ zur Publizierung an die Hand gegeben wurde. Dies ist vor allem dem allseits geschätzten Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, zu danken. P. Urban, Graz

Optics and Spectroscopy. January 1959. Vol. VI, No. 1. Washington: Optical Society of America.

Die russische Monatsschrift über Optik und Spektroskopie wird nunmehr von der amerikanischen optischen Gesellschaft in englischer Übersetzung herausgebracht. Da es sich um die führende russische Zeitschrift auf diesem Gebiet handelt, welche von der Akademie der Wissenschaften, Moskau, redigiert wird, stellt die englische Übersetzung einen wichtigen Einblick in die wissenschaftliche Tätigkeit der russischen Physiker dar, welche jedem auf diesem Gebiet arbeitenden Physiker von großem Nutzen sein wird. P. Urban, Graz

Über physikalische und mathematische Abhängigkeit. Von R. Orthner. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 5 Figuren, 60 S. Wien: Franz Deuticke. 1959. S 30.—.

Es entbehrt nicht eines gewissen Wertes, gelegentlich auch die Versuche eines Außenseiters kennenzulernen, wie er sich mit vielen eigenen Ausdrücken, in anscheinend bewußter Opposition gegen übliche Bezeichnungsweisen mit den Fragen der Formulierung und Lösung physikalischer Probleme auseinandersetzt. Ob damit aber dem Fortschritt der Wissenschaft gedient ist, bleibe dahingestellt. Die nunmehrige 2. Auflage enthält wohl gewisse Erweiterungen gegenüber der 1928 erschienenen 1. Auflage; doch muß noch immer der Eindruck entstehen, die physikalischen Aufgaben seien im Grunde alle sehr einfach, es gäbe nur wenige Typen von Relationen (besonders das „Gesetz der proportionalen Änderungen") und es läge zumeist nur an einem unzweckmäßigen mathematischen Apparat, daß die Aufgaben schwer und kompliziert erscheinen. So wird denn auch diesmal der Appell an die Mathematiker, sich seinen Ideen und Methoden anzupassen, wohl wirkungslos verhallen. A. Aigner, Graz

Mechanik deformierbarer Körper. Von M. Päsler. [Sammlung Göschen: Band 1189/1189a. Mit 48 Abb., 199 S. Berlin: Walter de Gruyter u. Co. 1960. Brosch. DM 5.80.

Die vorliegende Darstellung der Mechanik deformierbarer Körper ist hinsichtlich ihres Aufbaues und der Klarheit ihrer Darstellung für Studierende sehr zu empfehlen. Besonders der angehende Techniker findet hierin alles Wissenswerte in überaus verständlicher Weise. Ein ausführliches Literaturverzeichnis und eine Liste der verwendeten Symbole erleichtern die Verwendung dieses in jeder Weise vorbildlichen Büchleins. P. Urban, Graz

Physikalische Abhandlungen aus der Sowjetunion. Neue Folge. Band 1, Heft 1. Mit zahlreichen Textabb., 70 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. 1959. DM 12.—.

Hier handelt es sich um eine mit dem Jahr 1959 neu beginnende Folge dieser Schriftenreihe. Bisher war der Inhalt der Hefte nach Spezialgebieten geordnet. Dadurch aber wurde das Erscheinen der Zeitschriften verzögert. Da nun aber neuerdings eine Übersetzung der bekanntesten und wichtigsten russischen Zeitschriften, wie des Journals für Experimentelle und Theoretische Physik ins Eng-

lische erfolgt, hat sich der Verlag zu den oben genannten Änderungen entschlossen und gibt nun sechs Hefte im Jahr heraus, worin in jedem Heft eine Übersetzung ins Deutsche von einer oder zwei Arbeiten aus folgenden Teilgebieten aufgenommen werden:

1. Theoretische Physik, Arbeiten von allgemeiner Bedeutung.
2. Magnetische Fragen.
3. Gasentladungs- und Plasmaphysik.
4. Tieftemperaturphysik.
5. Festkörperphysik, Halbleiter und Ferro-Elektrika.
6. Plasmaphysik.

Die Übersetzungen werden von Fachleuten vorgenommen.

In nächster Zeit ist auch die Aufnahme des Teilgebietes „Kernphysik" geplant.

In dem nun vorliegenden Heft 1 findet man neun Arbeiten, wovon die erste kurz beschrieben sei. Hierbei handelt es sich um die bekannte und in der Zwischenzeit bereits oftmals zitierte Arbeit von L. B. Okun und I. Ja. Pomerantschuk: Über periphere Wechselwirkungen von Elementarteilchen.

Da die Mesontheorien für $r \ll 1/\mu$ nicht garantiert sind, versucht man, die physikalischen Erscheinungen in größeren Entfernungen zu beschreiben. Den Autoren gelingt dies dadurch, daß ein Vordringen der Teilchen auf kleinere Abstände durch die Zentrifugalbarriere verhindert wird, wenn für die Partikeln ein großes relatives Bahnmoment l angenommen wird. So kann die π-Nukleon-Streuung durch den Austausch zweier π-Mesonen und die $N - N$-Streuung durch die Einmesonnäherung beschrieben werden. Als Entwicklungsparameter dient $\frac{g^2}{4\pi} e^{-\mu\lambda l}$, das bei hinreichend großem l kleiner wie eins ist, wenn die Kopplungskonstante $\frac{g^2}{4\pi} \sim 15$ ist ($\mu = m_\pi$, $\lambda\!\!\!^{-} =$ Wellenlänge des Teilchens).

Neben dieser Arbeit sind in diesem Heft noch zwei weitere, die dem Journal entnommen wurden. Daraus könnte man schließen, daß diese Schriftenfolge etwa fünf Prozent der russischen Literatur vermittelt, man muß aber dazu bemerken, daß hierbei wohl die wichtigsten Artikel berücksichtigt werden.

Die englische Ausgabe ist vollständig und erscheint etwas schneller. Der Postweg ist aber ebenso zu berücksichtigen, als die Tatsache, daß, wenn man sich für die Übersetzung aller Artikel entscheidet, also für die amerikanische Ausgabe, auch die Übersetzungen aller wichtigen Zeitschriften zu beziehen sind.

Mit der deutschen Ausgabe erhält man dagegen die wichtigsten Artikel und dies ist ein wesentlicher Vorteil, abgesehen von finanziellen und sprachlichen Erwägungen.

H. Zingl, Graz

Integraltafeln zur Quantenchemie. Von H. Preuss. Vierter Band, VI, 145 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen DM 45.—.

Der eben erschienene 4. Band der Integraltafeln zur Quantenchemie von H. Preuss ist der Behandlung der Mehrzentrenintegrale gewidmet. Wegen der Schwierigkeit des Stoffes ist eine ausführliche Einführung vorangestellt, in welcher alle methodischen Fragen und Zusammenhänge näher erörtert werden. Dabei wurden alle neueren Entwicklungen berücksichtigt, welche die Tendenz haben, zu einfacheren Einelektronenfunktionen überzugehen. Die dabei geleistete Arbeit des Autors ist aufrichtigst zu bewundern, besonders im Hinblick darauf, daß die zunehmende Literatur den Stoff während der Herausgabe kontinuierlich vergrößert. Es ist daher der 4. Band dieses großangelegten Werkes jedem auf diesem Gebiet arbeitenden Kollegen wärmstens zu empfehlen und auch dem Verlage für die Ausstattung ein hervorragendes Zeugnis auszustellen.

P. Urban, Graz

Progreß in Cryogenics. Vol. 1. Herausgegeben von K. MENDELSSOHN. Mit zahlreichen Textabb., VII, 259 S. London: Heywood and Company Ltd. 1959. 63 s.

Auf Grund der immer größer werdenden Bedeutung der Untersuchungs- und Arbeitsmethoden bei tiefen Temperaturen — ein Umstand, der sich auch in den zahlreichen diesbezüglichen Veröffentlichungen in den verschiedenen Zeitschriften ausdrückt — besteht ein berechtigtes Bedürfnis nach Büchern der vorliegenden Art. Es sollen hier ähnlich wie in anderen Buchreihen (z. B. Progress in Nuclear Physics) neue, wesentliche Ergebnisse in zusammengefasster Form herausgebracht werden. Und wie bei den anderen schon gut eingeführten Reihen dieser Art wird auch die vorliegende in kürzester Zeit ihren Freundeskreis erworben haben.

Um einiges aus der Fülle des vorliegenden ersten Bandes herauszugreifen, soll vor allem die Behandlung der Stromkreise mit supraleitenden Elementen erwähnt werden. Cryotrons, supraleitende Modulatoren zur Gleichstrommessung bei tiefen Temperaturen oder Gleichrichter und Verstärker, die unter Berücksichtigung des Leitfähigkeitssprungs arbeiten, ergeben für den bei tiefen Temperaturen messenden Physiker eine Reihe reizvoller und nützlicher Möglichkeiten. Dabei verspricht man sich vor allem von Cryotrons mit als Film ausgebildeten Supraleiter noch zahlreiche Verbesserungen und neue Möglichkeiten. Die thermoelektrische Abkühlung (PELTIER-Effekt) wird kurz behandelt, die Vorteile der Halbleiter dabei erläutert und einige Anwendungen (z. B. Taupunkthygrometrie) angeführt. Ebenso findet man einen Abschnitt über die Messung der mechanischen Eigenschaften der Metalle bei tiefen Temperaturen. Gerade diese Fragen haben natürlich wegen der immer mehr um sich greifenden Arbeitsmethoden der Tieftemperaturphysik ein besonderes Interesse. Darüber hinaus haben die bisherigen Untersuchungen der elastischen Eigenschaften der Metalle in diesem Temperaturbereich wesentlich zum Verständnis des Verhaltens der Metalle überhaupt beigetragen. So kommt auch aus diesem Grunde den behandelten Meßmethoden besondere Bedeutung zu.

Über die angeführten Fragen hinaus werden noch eine Reihe anderer interessanter Probleme behandelt, auf die nicht weiter eingegangen werden soll. Es handelt sich dabei um Tieftemperaturkalorimetrie, Dämpfung von Ultraschall in Metallen bei tiefen Temperaturen, Destillation bei tiefen Temperaturen usw. Alle diese Fragen sind klar und übersichtlich behandelt und gehen in einem, dem Rahmen des Buches angepaßten Ausmaß in die Tiefe.

Sowohl Fachmann wie Neuling auf dem Gebiet der Probleme tiefer Temperaturen werden — wenn die weiteren Bände das Versprechen des ersten Bandes halten — aus der Reihe ihren Gewinn ziehen. Ausstattung und Druck sind gut.

N. PUCKER, Graz

Principles of Electricity and Magnetism. Von E. M. PUGH und E. W. PUGH. Mit zahlreichen Textabb., XI, 430 S. Reading, Mass.-London: Addison Wesley Publishing Company, Inc. 1960. $ 8.75.

Das in der bekannten Addison-Wesley-Serie erschienene Buch über die Prinzipien der Elektrizität und des Magnetismus stellt einen wertvollen Lehrbehelf für Studierende dar. Es macht durchgehend von der Vektorrechnung Gebrauch, setzt aber in mathematischer Hinsicht nicht sehr viel voraus. Alles was hier gebraucht wird, wie komplexe Variable, Linienintegrale, Grundlagen der Methoden der Lösungen der Differentialgleichungen und so fort, werden stets in einfacher und klarer Weise erläutert, bevor sie verwendet werden. Das Buch führt so den Studenten in die wichtigsten Prinzipien der MAXWELLschen Theorie ein, wobei zum besseren Verständnis eine sorgfältige Auswahl von Aufgaben und Lösungen

hinzugenommen wurden. Herausgegriffen sei noch die hübsche und klare Darstellung des POYNTINGschen Vektors, sowie die Strahlung des Dipols. Das Werk kann nicht nur den Studierenden, sondern auch den Vortragenden zur Unterstützung der Abhaltung der Übungen sehr empfohlen werden.

P. URBAN, Graz

Elektronenmikroskopische Untersuchungs- und Präparationsmethoden. Von L. REIMER. Mit 135 Abbildungen und 20 Bildtafeln, VIII, 300 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 58.—.

Das vorliegende Buch ist das erste seiner Art: ein zusammenfassendes Werk über die praktische Elektronenmikroskopie, dessen Erscheinen von allen auf diesem Gebiete Tätigen freudig begrüßt werden wird. Nach übersichtlicher Behandlung funktioneller und apparativer Grundlagen der Methode, vor allem den Aufbau der Geräte und die Bildentstehung betreffend, wird die Präparationstechnik, mit deren Beherrschung die angewandte Elektronenmikroskopie bekanntlich steht oder fällt, eingehend diskutiert. Hier hätte freilich auf Präparationsverfahren näher eingegangen werden können, die nicht nur die Durchstrahlungsmikroskopie betreffen.

Nachdem der behandelte Gegenstand sich in steiler Aufwärtsentwicklung befindet, ist der in diesem Fach Tätige versucht zu sagen, das vorliegende Buch wurde gerade in jenem Augenblick geschrieben, da es von einem Autor allein noch zu bewältigen war. Diese Meinung wird auch des öfteren bestätigt gefunden, so etwa hätte wohl über die Präparation organischer Substanzen mehr gesagt werden können, auch findet man nicht immer die, nach jedem Kapitel eingeschobene, Literatur nach Schwerpunkten geordnet vor.

Der Autor, welcher in letzter Zeit durch ausgezeichnete einschlägige Arbeiten hervorgetreten ist, hat es verstanden, besonders aktuelle Themen, wie etwa die Gefriertrocknung und Ultramikrotomie, entsprechend herauszustellen. Obwohl der Umfang der einzelnen Abschnitte klein gehalten werden mußte um den Rahmen des Buches nicht zu sprengen, ist darin oft eine Fülle von Wissenswertem komprimiert. So findet man, um ein Beispiel anzuführen, unter „Elektronenbeugung" nicht nur die kristallographischen Grundlagen, sondern auch geschickt formulierte Zusammenfassungen über die Intensität und Zuordnung der Beugungsreflexe, über die Feinbereichsbeugung, Beugungsdiagramme amorpher Stoffe, Texturdiagramme; einige passend gewählte Tabellen und eine Literaturübersicht beschließen dieses Kapitel.

Sehr erfreulich ist auch die Zusammenstellung von sonst meist nur getrennt behandelten grundlegenden Gebieten, die für die Elektronenmikroskopie von Bedeutung sind, etwa von Intensitätsmessungen, Artefakten, Photoschichten, die Erfassung von Scheinstrukturen, das Testen des Auflösungsvermögens elektronenoptischer Systeme u.a.m. Am Schluß des empfehlenswerten Buches findet man ausgewählte elektronenmikroskopische Bilder hervorragender Qualität.

F. GRASENICK, Graz

Report of the National Physical Laboratory 1958. Department of Scientific and Industrial Research. London: Her Majesty's Stationery Office. 1959. 8 s.

Der vorliegende Bericht des National Physical Laboratory gibt einen ausführlichen Überblick über die Tätigkeit dieser Institution im Jahre 1958. Es ist daraus ersichtlich, daß die bearbeiteten Teilgebiete der Physik sich über einen sehr weiten Bereich erstrecken, wie etwa Aerodynamik, welche einen großen Raum einnimmt, gewisse Gebiete der angewandten Physik (Radiologie, Akustik usw.), Tieftemperaturforschung, Ultraschall, Untersuchung der Festigkeitseigenschaften von Metallen unter speziellen Bedingungen oder metallurgische Fragen.

Das Verzeichnis der im Jahr 1958 von den einzelnen Abteilungen erfolgten Publikationen gibt ein gutes Bild vom Wirkungsgrad dieser Institution. Im ganzen gesehen eine gelungene und interessant gestaltete Berichterstattung über die Arbeiten im „National Physical Laboratory". N. Pucker, Graz

Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Von L. Robin. Band III. (Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T.) VIII, 289 S. Paris: Gauthier-Villars, 1959. $ 11.40, geb. $ 12.42.

Dies ist der dritte Band eines Sammelwerkes über Kugelfunktionen dessen beide ersten Bände schon jeweils im November 1957 bzw. 1958 erschienen sind.

Hier werden eingangs die allgemeinen Legendreschen Funktionen (zu beliebigem Index) behandelt. Sie finden dann Verwendung zur Separation der Gleichung $\Delta u + K^2 u = 0$ in verschiedenen rotationssymmetrischen Koordinatensystemen, z. B. (deutsche Bezeichnungen nach Madelung) den Koordinaten des verlängerten und abgeplatteten Ellipsoids, Ringkoordinaten und anderen. (Die Kugelkoordinaten und die zugehörigen Kugelfunktionen finden sich bereits im ersten Band). Diesem Separationsproblem ist rund die Hälfte des dritten Bandes gewidmet. Den Abschluß bildet ein Kapitel, in dem noch einige andere, mit den Legendreschen in Beziehung stehenden, Funktionen behandelt werden, z. B. die Gegenbauerschen Funktionen.

Dem Buch ist ein ausführliches Literaturverzeichnis beigegeben, das auch die deutsche und englische Literatur dieses Gebietes berücksichtigt. Eine Zusammenstellung erhältlicher Tabellenwerke (Stand Ende 1958) ist für den wertvoll, der praktisch rechnet.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß das Buch in einer Art geschrieben ist, die es ermöglicht, es auch mit geringeren französischen Sprachkenntnissen zu lesen. H. Neuer, Graz

The Differential Geometry of Finsler spaces. Von H. Rund. XIII, 284 S. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 101.] Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. DM 55.80, Ganzleinen DM 59.60.

Das Bedürfnis nach einer großteils elementaren Darstellung der Differentialgeometrie in Finslerschen Räumen, eines Gebietes, das in den letzten Jahrzehnten hauptsächlich durch die Arbeiten von L. Berwald und E. Cartan so große Fortschritte zu verzeichnen hatte, war maßgebend für den Entschluß des Verfassers, das ursprünglich für die „Ergebnisse"-Reihe vorgesehene Werk lieber in die „Grundlehren"-Sammlung einzugliedern. Mit der Verbreiterung der elementaren Teile geht nun naturgemäß eine weitgehende Beschränkung auf die Methoden der klassischen Differentialgeometrie und Tensoranalysis zusammen. Die moderne Theorie von H. Busemann wird nur dort am Rande erwähnt, wo sie ein speziell diskutiertes Problem berührt. Natürlich sind aber bei der Lektüre lineare Algebra und Tensorrechnung schon vorausgesetzt. — Besonderes Augenmerk richtet sich zunächst auf die Zusammenhänge zwischen Variationsrechnung und Differentialgeometrie, wie sie zum Teil schon vor Finslers Dissertation (1918) von G. Landsberg, G. A. Bliss und W. Blaschke aufgezeigt wurden. Das Kernstück dabei bildet die Figuratrix. Nach einem Kapitel über den „Euklidischen Zusammenhang" von E. Cartan nimmt wieder die Krümmungstheorie einen breiten Raum ein, in welcher die drei Krümmungstensoren von E. Cartan an der Spitze stehen. Dann folgt Allgemeines über Krümmungstensoren sowie über Räume mit konstanter Krümmung. Der nächste große Abschnitt ist der Theorie der Unterräume gewidmet und bringt auch Kurventheorie und Minkowskische Metrik. Den Abschluß bilden einige ausgewählte Kapitel wie Bewegungsgruppen, nichtlineare Zusammen-

hänge, lokale Einbettungsprobleme und zweidimensionale FINSLERsche Räume. Das so reichhaltige Buch läßt auch verschiedene physikalische Anwendungen, besonders in Feldtheorie und geometrischer Optik, durchblicken.

A. AIGNER, Graz

Geist und Materie. Von E. SCHRODINGER. Mit 3 Abb., VII, 78 S. Braunschweig: Friedr. Vieweg u. Sohn. 1959. Halbleinen DM 9.—.

Universelle Geister sind in den letzten Jahren immer seltener geworden, so daß Äußerungen gerade von ihnen umso wertvoller sind. E. SCHRÖDINGER gehört zu diesem Gelehrtentyp, welcher die Reihe eines LEIBNIZ und HUMBOLDT in die Gegenwart fortsetzt. Als Mitbegründer der modernen Physik ist seine Ansicht über das Verhältnis von Geist und Materie, von lebender und toter Substanz für uns von größtem Interesse. Aber nicht allein die Gedanken selbst sind es, welche uns immer wieder aufs Neue anregen, die Art wie er sie anschaulich formuliert, wie er sie stilisiert, sind an und für sich schon fesselnd und erinnern an den Ausspruch des großen Altmeisters der theoretischen Physik A. SOMMERFELD, welcher geradezu von einem faszinierenden Schrödingerstil sprach.

Es ist daher dem Verlag besonders zu danken, daß er es unternommen hat, diese Vorträge herauszugeben und nur zu wünschen, daß von ihnen ein vielseitiger Gebrauch gemacht wird.

P. URBAN, Graz

Mechanische Schwingungslehre. Teil II: Mehrfache Schwinger. Von M. SCHULER. 1./2. Auflage. Mit 100 Bildern, V, 150 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. G. 1959. Geb. DM 14.—.

Knapp ein Jahr nach dem Wiedererscheinen des ersten Teiles liegt jetzt der zweite Teil der Schwingungslehre von MAX SCHULER vor.

Der Untertitel mehrfache Schwinger vermittelt vielleicht keine präzise Vorstellung vom behandelten Stoff, daher zuerst ein paar Worte über den Inhalt. Das Buch ist in drei Teile gegliedert: Teil A bringt FOURIER-Analyse, aber vom praktischen Standpunkt. Es werden hauptsächlich mechanische und elektrische Hilfsmittel zur Bestimmung der FOURIER-Koeffizienten einer vorgelegten Funktion und zur Ermittlung der Funktionskurve aus gegebenen FOURIER-Koeffizienten beschrieben. Teil B, rund die Hälfte des Buches, befaßt sich mit freien und erzwungenen gekoppelten Schwingungen von zwei und drei Schwingern. Es werden die verschiedenen Kopplungsarten (Kraftkopplung, Trägheitskopplung usw.) auseinandergesetzt und Methoden zur Lösung der Integrationsaufgaben angegeben. Anwendungen in der Technik, z. B. Stabilitätsfragen, Eintreten von Resonanz bei erzwungenen Schwingungen, Schwingungstilgung und ähnliche Probleme werden ausführlich erörtert. Teil C behandelt die Wellenbewegung und schließt damit an Teil B insofern an, als es sich nun um die Bewegung von unendlich vielen gekoppelten Systemen handelt. Mathematisch gesehen sind hier partielle Differentialgleichungen zu integrieren, doch werden vom Leser keine einschlägigen Vorkenntnisse verlangt. Die behandelten Probleme: Schwingende Saite, Longitudinalwellen in Stäben, Biegeschwingungen von Stäben und Oberflächenwellen.

Zur Art der Darstellung ist zu sagen, daß hier ein Mittelweg zwischen den Lehrbüchern der (theoretischen) Physik und rein technischen Lehrbüchern beschritten wird. Der Verfasser legt einmal Wert auf sauberes Herausarbeiten der physikalischen Grundlagen, bringt aber dann eine Fülle von Anwendungen, doch ohne sich in rein technische Einzelheiten zu verlieren. Die Ausführung aller gebrachten Beispiele ist so, daß ein wirkliches Verstehen und Überblicken der betreffenden Bewegungsvorgänge möglich ist. Dadurch wird sicher ein großer Leserkreis angesprochen.

Beide Bände zusammen, die einfachen und die mehrfachen Schwinger, stellen ein ausgezeichnetes Nachschlagewerk dar. Druck und Ausstattung sind gut.

H. Neuer, Graz

College Physics. Von F. W. Sears und M. W. Zemansky. 3. Aufl. Mit zahlreichen Textabbildungen, XXIII, 1024 S. Reading, Mass.-London: Addison-Wesley Publishing Company, INC. 1959. Geb. $ 9,75.

Die beiden Autoren sind an Colleges tätig (Dortmouth/England und the City College of New York). Sie bringen eine Einführung in die Physik, die etwa den Stoff unserer zweisemestrigen Anfangsvorlesung für Physiker umfaßt, eine Besonderheit ist das Kapitel über die Farbe, in dem Colorimetrie und Spectrophotometrie behandelt werden. Die Darstellung ohne höhere Mathematik ist überall sehr klar, die Grundlagen werden gut herausgearbeitet, es sei z. B. die Behandlung des idealen Gases und die Darstellung des Temperaturbegriffs und der Temperaturmessung besonders hervorgehoben. Die vielen in den Text eingestreuten durchgerechneten Beispiele, sowie die zahlreichen Aufgaben am Schluß jedes Kapitels, deren Resultate im Anhang angegeben sind, stellen eine überaus wertvolle Hilfe für den Studierenden dar. Für unsere deutschen Studenten ist das Buch überdies als Nachschlagbehelf für die englischen Fachausdrücke gut geeignet.

A. Székely, Graz

Elektronen- und Ionenprozesse in Ionenkristallen. Von O. Stasiw. [Struktur und Eigenschaften der Materie in Einzeldarstellungen: Band XXII]. Mit 107 Textabb., 307 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. Geb. DM 66.—.

Die vorliegende Monographie erschien als Band XXII in der Reihe „Struktur und Eigenschaften der Materie in Einzeldarstellungen". Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, eine zusammenfassende Darstellung über die Entstehung von Reaktionsprodukten durch photochemische Prozesse als Störstellenreaktionen in festen Körpern zu geben. Dabei war eine Beschränkung auf einfache Ionengitter unerläßlich, um eine erfolgreiche theoretische Behandlung zu erreichen.

Erfreulicherweise werden die erforderlichen Grundlagen so ausreichend behandelt, daß sich ein Nachschlagen in anderen Werken im allgemeinen erübrigt. Daß die Theorie der Störstellenabsorption geordnet am Ende erfolgt, wird vielen vorwiegend experimentell interessierten Lesern das Studium des Buches wesentlich erleichtern.

J. Wagner, Graz

Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung. Von W. Stegmüller. 114 Seiten. Wien: Springer-Verlag. 1959. Steif geheftet S 118.80, DM 19.80, sfr. 20.30, $ 4.70, £ 1/13/6.

Daß sich das vorliegende Buch im Untertitel ausdrücklich auch an den Erkenntnistheoretiker wendet, ist tief in der gegenwärtigen Situation der Philosophie begründet, die dadurch gekennzeichnet ist, daß neben dem breiten Strom der ausschließlich historisch und geisteswissenschaftlich orientierten Philosophie und der Existenzphilosophie aller Schattierungen die in engerem und strengerem Sinn des Wortes wissenschaftliche Philosophie einhergeht, die unter den Bezeichnungen „Grundlagenforschung", „analytische Philosophie", „generelle Semantik" und „Metamathematik" während der letzten Dezennien zu solchem Umfang angewachsen ist, daß auch der Fachmann das Gesamtgebiet kaum mehr überblicken kann. Insbesondere fehlt es in der Metamathematik an einer zusammenfassenden Darstellung der überaus wertvollen Ergebnisse, zu denen diese Disziplin in jüngster Zeit gelangt ist.

Das vorliegende Buch stellt sich nun die Aufgabe, jene Ergebnisse der metamathematischen Forschung, die auch für den Logiker und den Erkenntnistheoretiker (und damit für den Philosophen überhaupt) von Wichtigkeit sind, in einer auch für den Nicht-Fachmathematiker verstehbaren Weise zu behandeln. Die Schwierigkeit, aber auch das Verdienst eines solchen Unternehmens können nicht hoch genug eingeschätzt werden. Denn es handelt sich durchwegs um äußerst abstrakte und exakte Gedankengänge von erheblichem Schwierigkeitsgrad, die überhaupt nur in einem besonderen Formalismus adäquat darstellbar sind. Diese Beweisführungen und die dazu nötigen technischen Vorbereitungen in selbständiger Weise Schritt für Schritt so darzubieten, daß sie auch ohne die sonst vorauszusetzenden gründlichen Vorkenntnisse prinzipiell verständlich werden und dabei ihre Exaktheit nicht verlieren, setzt eine souveräne Beherrschung der Materie und großes pädagogisches Geschick voraus. Man darf sagen, daß es dem Autor gelungen ist, mit einem Minimum an Voraussetzungen ein Optimum an Verständlichkeit zu erreichen. In diesem Zusammenhang ist der in Abschnitt A dargelegte intuitive Zugang zum Gödelschen Unvollständigkeitstheorem, der sich der Antinomie von Richard bedient, einem vorbereitenden Verständnis des Folgenden sehr förderlich. Freilich bringt es die Natur der Sache mit sich, daß es auch bei allen diesen Erleichterungen nicht ohne den Aufbau und die Verwendung eines größeren technischen Apparates abgeht, den der Leser sich aneignen und mit dem er operieren lernen muß. Auch verlangt der Nachvollzug der Beweise zwar keine besonderen mathematischen Fachkenntnisse, wohl aber die Fähigkeit, die Eigentümlichkeit mathematischer Denkweisen zu erfassen.

Dies vorausgesetzt, bringt die Lektüre des Buches die Einsicht mit sich, daß die Ergebnisse der Metamathematik — wenn auch zunächst auf dem Boden der mathematischen Grundlagenforschung gewonnen — in ihrer Bedeutung über dieses engere Gebiet hinausgreifen. Wenn, wie deutlich zu Tage tritt, Zentralbegriffe der Erkenntnistheorie wie „Wahrheit", „Beweisbarkeit" (die Unterscheidung von „syntaktischer" und „semantischer" Beweisbarkeit), „Ableitbarkeit", „Definierbarkeit", „Entscheidbarkeit", „Erfüllbarkeit" u. a. nur in einem bisher ungewohnten präzisen Sinn verwendet werden können, dann leuchtet ein, daß der Philosoph, der über Grundlagen und Grenzen der Erkenntnis reflektiert und kompetente Aussagen darüber machen will, von diesen Ergebnissen Kenntnis haben muß und daß der Logiker sich nicht mit der herkömmlichen aristotelischen Logik und der Erkenntnistheoretiker sich nicht mit der traditionellen Erkenntnistheorie, die sich in einem sehr allgemeinen Raisonnement zu erschöpfen pflegt, begnügen kann.

Das Buch ist für den an Grundlagenfragen interessierten Mathematiker und Physiker und für den Philosophen, der in seinem Fach nach möglichster Exaktheit strebt, von Wichtigkeit.

R. Freundlich, Graz

Himmelsmechanik. Band 1. Von K. Stumpff. Mit 60 Abb., 508 S. [Hochschulbücher für Physik: Band 32. Herausgegeben von Eder und Rompe.] Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Kunstleder DM 56,80.

Dem vorliegenden 1. Band der Himmelsmechanik von Stumpff sollen zwei weitere folgen, die dem Dreikörperproblem und der Theorie der speziellen Störungen bzw. den allgemeinen Störungen und Stabilitätsfragen gewidmet sind. Der 1. Band ist der Bahnbestimmung der Himmelskörper gewidmet, betrachtet von höherer Warte.

Eine historische Einleitung berichtet zunächst über die Planetentheorien der Antike, hauptsächlich des Ptolemäus. Es ist eine verdienstvolle Arbeit des Verfassers, diese Theorie in die moderne mathematische Sprache übersetzt und alles

Wesentliche auf kurzen Raum zusammengedrängt zu haben. Wer den Almagest des Ptolemäus, selbst in der handlichen Übersetzung von Manitius, kennt, weiß, wie ermüdend durch die schwerfällige Symbolik dessen Lektüre ist. Der Beschäftigung mit dem historischen Gegenstand verdankt der Verfasser offenbar die hübsche Idee, die Vorteile der antifokalen Anomalie gegenüber der fokalen näher zu untersuchen.

Die nächsten zwei Kapitel behandeln die Keplerschen Gesetze und das Zweikörperproblem in sehr vollständiger Weise. Seinen im Vorwort geäußerten Grundsatz, das „Verständnis des Schülers nicht mit abstrakten Gedankengängen", wie etwa der Hamilton-Jacobischen Theorie, zu belasten, wird der Verfasser allerdings auf Seite 96 untreu, indem er die kanonische Form der Differentialgleichungen in einer Weise einführt, die dem Anfänger völlig unverständlich bleiben muß. Ein kleiner Abschnitt über „Potentialtheorie" macht auf die Grenzen der Gültigkeit der strengen Gesetze der Zweikörperbewegung und auf notwendige Ergänzungen aufmerksam.

Das 4. Kapitel ist der Berechnung ungestörter Ephemeriden gewidmet, wobei auch neuere Methoden behandelt werden.

Kapitel 5 und 6 sind Vorbereitungen für das Problem der Bahnbestimmung nach den beiden grundlegenden Methoden von Laplace und Gausz. Die Zweikörperbewegung ist bestimmt, wenn entweder der relative Ort und die Geschwindigkeit für einen bestimmten Zeitpunkt vorgegeben sind („Anfangswertproblem"), oder wenn für zwei gegebene Zeitpunkte die beiden relativen Örter bekannt sind („Randwertproblem"). Bei der Behandlung der Beziehungen zwischen den bekannten Stücken in beiden Fällen und den Bahnelementen werden insbesondere jene Formeln bereitgestellt, welche in den der Bahnbestimmung gewidmeten Kapiteln 8 und 9 gebraucht werden. Auf diese Weise kann dort der Kern der einzelnen Methoden ohne Unterbrechung durch lange Deduktionen klarer herausgestellt werden.

Im 7. Kapitel werden die im Zweikörperproblem verwendeten Reihenentwicklungen behandelt und damit nicht nur für die beiden folgenden Kapitel, sondern auch für den 3. Band die notwendigen Vorarbeiten geleistet. Ein zehntes Kapitel über das allgemeine Zweikörperproblem bei Einfluß beliebiger Zentralkräfte beschließt den Band.

Man wird dem Verfasser beistimmen, daß ein Lehrbuch über Himmelsmechanik in deutscher Sprache einem Bedürfnis entspricht, das durch die in neuer Zeit erschienenen Übersetzungen nicht befriedigt wurde. Die Darstellung ist überall klar, die Druckfehler, obwohl ein großes Vielfaches der in den „Berichtigungen" angegebenen, sind nicht sinnstörend und daher mehr Schönheitsfehler. Die Ausstattung und der Druck sind vorzüglich und zehn Hilfstafeln im Anhang geben die Möglichkeit, die theoretischen Entwicklungen an praktischen Beispielen anzuwenden und zu erproben. O. Mathias, Graz

Technik der Magnetspeicher. Unter Mitarbeit zahlreicher Fachleute herausgegeben von F. Winckel. Mit 325 Abb., XVI, 614 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Geb. DM 72.—.

Das eben erschienene Werk ist einem Gebiet gewidmet, das sich erst in jüngster Zeit zu einem sehr wichtigen Bestandteil für viele Gebiete der Technik entwickelt hat. Das hier behandelte Speicherverfahren, welches aus der Magnetton-Aufzeichnung hervorgegangen ist, hat sich neben anderen physikalischen Prinzipien der Speicherung als überlegen gezeigt und insbesondere neben den Platten und Trommelspeichern rasch durchgesetzt, da bekanntlich der Magnetkernspeicher der elektronischen Rechenmaschine ein größeres Anwendungsgebiet zugeführt hat.

Die ganze magnetische Speichertechnik hat sich als ein eigenständiges Gebiet entwickelt und wurden für sie die theoretischen Grundlagen neu bearbeitet und das Prinzip der Signal-Aufzeichnung und Signal-Abnahme einheitlich festgelegt. Auch eine eigene Meßtechnik und eine eigene technische Norm wurde notwendig und wir haben in dem eben erschienenen Werk eine Basis für die Weiterentwicklung erhalten. In sehr schönen Einzelartikeln wird dem Leser ein Überblick über die wichtigsten Anwendungsgebiete gegeben, wobei Magnetton, Studiotechnik, Fernsehen, Film, Rechentechnik und ihre zahlreichen maschinellen Verfahren herausgegriffen sind.

Das Buch gibt einen beredten Ausdruck für eine gute Gemeinschaftsarbeit einschlägiger Fachleute und gibt dem Ingenieur die Möglichkeit, sich rasch in das Gebiet einzuarbeiten und dasselbe seinen Problemstellungen nutzbar zu machen.

P. Urban, Graz

Masers. Mikrowave Amplification and Oscillation by Stimulated Emission. Von G. Troup. Methuen's Monographs on Physical Subjects, General Editor B. I. Worsnop. Mit 20 Fig. und 3 Tabellen, 168 S. London: Methuen & Co Ltd. — New York: John Wiley & Sons Inc. 1959. Geb. £ — 13 6.

Die Methode, Mikrowellen durch induzierte Emission zu verstärken oder zu erzeugen, gewinnt zunehmend an Interesse, sodaß dies nun erschienene Buch wohl einen lang ersehnten Wunsch weiter Kreise darstellen dürfte.

Das Werk beginnt mit einer Betrachtung der wichtigsten theoretischen Grundlagen. Im weiteren werden ausgiebig die in Verwendung stehenden Anregungsmethoden behandelt sowie die Betriebsbedingungen als Verstärker und Oszillator. In einem besonderen Kapitel kommen praktisch ausgeführte Ammoniak Masers, Zwei-Niveau- und Drei-Niveau-Masers zur Diskussion.

In einer Literaturzusammenstellung am Ende des Buches sind alle verfügbaren Arbeiten zitiert. Um größtmögliche Vollständigkeit auf diesem in rascher Entwicklung befindlichen Gebiet zu erreichen, hat der Verfasser während des Druckes erschienene Arbeiten in einem Zusatzblatt mit einer kurzen Diskussion angeführt.

F. Gross, Graz

Algebra. Von B. L. van der Waerden. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Vierte Auflage der modernen Algebra. Zweiter Teil. X, 275 S. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 34). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Ganzleinen DM 29.60.

Die eben erschienene vierte Auflage des 2. Bandes der Algebra von van der Waerden bringt neben zahlreichen Neuformulierungen auch einige Ergänzungen und Verbesserungen. So wurden zwei neue Kapitel, eines über algebraische Funktionen einer Variablen und eines über topologische Algebra, eingangs hinzugefügt. Das Kapitel über „allgemeine Idealtheorie" wurde durch Hinzufügung der Sätze von Krull ergänzt, das Kapitel „Lineare Algebra" mit einem neuen Paragraphen 140 erweitert, der antisymmetrische Bilinearformen behandelt. Das Kapitel „Algebren" erhielt mehr Beispiele und die Theorie des Radikals von Jacobson wurde ohne Endlichkeitsbedingung hergeleitet. Auch wurden die Beweise der Hauptsätze durch Kombination der Methoden von Jacobson mit denen von Emmy Noether wesentlich vereinfacht. Die Paragraphen 163—165 wurden durchsichtiger gestaltet und neu geschrieben. Trotz Hinzufügung der eben erwähnten Teile hält sich der Umfang der vierten Auflage in den Grenzen der dritten Auflage, was dadurch erreicht wurde, daß Einiges weggelassen wurde, wie z. B. das Kapitel „Eliminationstheorie".

Über den Wert und über die Wichtigkeit dieses Werkes speziell für den theoretischen Physiker braucht kein Wort verloren zu werden. Ist es doch seit längerer Zeit schon ein unentbehrliches Hilfsmittel für unsere Studierenden geworden. Aber auch für den auf dem Gebiete der Feldtheorie Tätigen ist es als Nachschlagewerk unentbehrlich. P. URBAN, Graz

Semiconductors and Transistors. Von D. M. WARSCHAUER. Mit 176 Textabb., XII, 267 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. Geb. 50 s. 6 d.

Der Autor bringt in 19 Kapiteln eine leicht faßliche Einführung in das Gebiet der Halbleiter und Transistoren. Das Buch ist in erster Linie für Studierende der Ingenieurfächer gedacht und bringt deshalb in den ersten Kapiteln einen Überblick über allgemeine physikalische Grundlagen. Dabei versteht es der Verfasser ausgezeichnet, mit geringstem mathematischen Aufwand das Notwendigste zu erfassen.

Aber auch die weiteren Kapitel, die die eigentlichen Probleme der Halbleiter und Transistoren und die Anwendung derselben behandeln, zeichnen sich durch eine außerordentliche Klarheit der Darstellung aus, die durch die große Zahl der Abbildungen (insgesamt 176 schematische Abbildungen, Schaltskizzen usw.!) wesentlich unterstützt wird. Am Ende jedes Kapitels ist eine Reihe von Fragen zusammengestellt, die zum Verarbeiten des Gelesenen anregen sollen. Ein ausführliches Literaturverzeichnis bietet Gelegenheit, allfällige Lücken zu schließen.

Dieses Buch ist aber auch den Studierenden der Physik zu empfehlen, da es alles Wissenswerte über Halbleiter und Transistoren in müheloser Weise vermittelt. J. WAGNER, Graz

Physics of the Atom. Von M. R. WEHR und J. A. RICHARDS, jr. Mit zahlreichen Textabb., XI, 420 S. Reading, Mass.-London: Addison-Wesley Publishing. Company, Inc. 1960. $ 8.50.

Die Verfasser bemühten sich, den Zugang zur Atomphysik so einfach wie möglich zu gestalten. Die ersten Kapitel behandeln das atomistische Verhalten von Materie, Elektrizität und Strahlung. Dann folgen Atommodelle, Relativität, Röntgenstrahlen, Dualismus, Festkörperphysik, natürliche Radioaktivität und künstliche Radioaktivität, Kernenergie kosmische Strahlung und Elementarteilchen. Den Autoren gelang es, diese Kapitel einfach und übersichtlich zusammenzustellen. Daneben zeigten sie in Kürze auch Probleme der heutigen Physik, ohne auf Detailfragen näher einzugehen. Das Buch kann daher mit einigen bekannten Werken, die sich ebenfalls mit der Einführung in die Atomphysik beschäftigen, nicht konkurrieren, da es nicht so ausführlich ist. Dagegen aber wird bei prinzipiellen Dingen nicht mit Platz und Erklärungen gespart.

Man kann dieses Werk als gute Kurzfassung einer Einführung in die genannten Probleme bezeichnen. Wertvoll erscheinen mir die vielen Übungsaufgaben und die am Schluß angeführten Lösungen jeder zweiten Übung. H. ZINGL, Graz

Physikalisches Praktikum. Von W. H. WESTPHAL. Neunte, vollständig neubearbeitete Auflage. Mit 125 Textabb., VII, 285 S. Braunschweig: Verlag Friedrich Vieweg & Sohn. 1959. Flexibler Einband DM 19.80.

Im Gegensatz zu den vorangehenden Auflagen, die im wesentlichen nur Nachdrucke waren, liegt diesmal eine Neubearbeitung vor, die sich durch eine straffere Fassung des Stoffes auszeichnet. Eine eingehende Besprechung dieses allbekannten und in keinem physikalischen Praktikum fehlenden Standardwerkes erübrigt sich.
J. WAGNER, Graz

Modern Physics. Von H. A. Wilson. Vierte Auflage. Mit zahlreichen Textabb., XV, 473 S. London-Glasgow: Blackie & Son Limited. 1959. 40s.

Der Titel des Buches und ein Blick in das umfangreiche Inhaltsverzeichnis erwecken zuerst den Eindruck, es handle sich um eine gutgemeinte Zusammenstellung experimenteller und theoretischer Ergebnisse, die die Physik etwa seit der Jahrhundertwende gefunden hat und durch diese Aktualität solle das Interesse des Lesers erregt werden. Diese Meinung korrigiert man sofort, wenn man, gewissermaßen neugierig geworden, nachliest, was der Autor über Dinge zu sagen hat, die dem eigenen Arbeitsgebiet angehören oder nahestehen.

Ein Lehrbuch im üblichen Sinne ist „Modern Physics" nicht. Der Umfang des gebrachten Stoffes ist groß, man findet etwa die Lorentzsche Elektronentheorie, ausführlich die ältere und neuere Quantentheorie, Physik der Atomkerne, sehr viel über Gasentladungen (Arbeitsgebiet des Autors) und je einen Abschnitt über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Die einzelnen Kapitel stehen ohne besonderen Zusammenhang nebeneinander und bauen kaum aufeinander auf, sondern umfassen immer ein sachlich abgegrenztes Gebiet von Erscheinungen. Durch ein Beispiel soll das illustriert sein: Kapitel X, 20 Seiten, heißt „Positive Strahlen" und beinhaltet: Wann und wie positive Strahlen entdeckt wurden, die Experimente von J. J. Thomson (nebst Theorie), Massenspektroskopie (Theorie des Massenspektrographen, Arbeiten von Aston und Dempster, Mattauch allerdings fehlt), einiges über Isotope und am Ende noch ein paar Bemerkungen über die Genauigkeit massenspektroskopischer Messungen. Zwei Zitate: J. J. Thomson: Rays of Positive Electricity, F. W. Aston: Isotopes, geben die Möglichkeit, mehr und Genaueres über das betreffende Gebiet zu erfahren und weitere Hinweise zu finden.

In dieser Art sind alle Kapitel abgefaßt. Der Leser wird mit den experimentellen Erfahrungen konfrontiert, lernt die Geschichte der Entdeckungen kennen und findet eine kurze Skizze der Wege, die die Theorie zur Deutung eingeschlagen hat. Die Literaturhinweise machen zum Teil auch mit der älteren Literatur, soweit sie heute noch lesenswert ist, bekannt. Vorkenntnisse sollte der Leser natürlich haben, aber dann kann er sich über Probleme, die er bisher kaum oder nicht berührt hat eine erste Orientierung und einen garnicht so geringen Überblick verschaffen.

Es bleibt noch zu sagen: Die Darstellung ist trotz ihrer Kürze außerordentlich klar, präzise und verständlich, weil der Autor es versteht, das jeweils Wesentliche herauszugreifen. Man wünscht, daß jeder Student der Physik dieses Buch besitzt.

H. Neuer, Graz

Hydrodynamics. Von D. H. Wilson. Mit 52 Abb., VIII, 149 S. London: Edward Arnold (Publishers) LTD. 1959. 30 s. net.

Das vorliegende kleine Werk über Hydrodynamik ist in erster Linie für Studenten gedacht, welche sich der Mathematik oder theoretischen Physik widmen. Es gibt eine sehr kurze und klare Einführung in die Hydrodynamik, welche als Grundlage für das weitere Studium dieser wichtigen Disziplin der Physik genommen werden kann. Sehr gut ausgeführte Beispiele beleuchten die einzelnen Probleme, wobei besonders auch durch die Angabe der Lösungen eine Selbstkontrolle ermöglicht wird.

Eine ziemlich vollständige Bibliographie der wichtigsten Lehrbücher ermöglicht das eine oder andere Problem ausführlich zu studieren. P. Urban, Graz

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Institut für Theoretische Physik der Universität. — Druck: Berger & Schwarz, Zwettl, N.-Ö.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr.... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Dosimetrie der Strahlungen radioaktiver Stoffe

Von

Dr. phil. Walter Minder

ao. Professor für medizinische Strahlenphysik an der Universität und Leiter des Radium-Institutes in Bern

Mit 137 Textabbildungen. VIII, 300 Seiten. Gr.-8°. 1961
Ganzleinen S 384.—, DM 64.—, sfr. 65.50, $ 15.25

Strahlendosimetrie ist heute nicht nur eine als mehr oder weniger wichtig angesehene „technische Hilfe" bei der Strahlentherapie, sondern weit über ihr Ursprungsgebiet hinaus Grundlage zahlreicher Aufgaben aus Physik, Chemie, Biologie und Technologie und schließlich Ausgangspunkt der heute so wichtig scheinenden Strahlenhygiene. Die Atomtechnik und der Umstand, daß die radioaktiven Elemente heute das ganze periodische System umfassen, haben die Aufgaben der Strahlendosimetrie gewaltig vermehrt und vertieft. Das MINDERsche Buch trägt dieser Entwicklung in allen Punkten Rechnung und unterscheidet sich daher grundlegend von der seinerzeit so erfolgreichen „Radiumdosimetrie" des gleichen Verfassers. Gleich geblieben ist das Ziel des Autors: sowohl den Ärzten als auch den Physikern verläßliche und brauchbare Unterlagen für ihre Arbeit zu geben. Dabei ist die Darstellung so angelegt, daß der therapeutische Praktiker die ihn interessierenden Zahlenwerte bequem entnehmen oder einfach ermitteln kann, während der Dosimetriefachmann reichlich Material und umfangreiche Literaturangaben für ein vertieftes Studium findet.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Dosimetrie und Strahlenschutz

Physikalische und technische Daten. *Von Prof. Dr. R. G. JAEGER, Braunschweig/Mainz. 1959. XII, 282 Seiten, 97 Abbildungen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 49,50*

Leitfaden des Strahlenschutzes

Für Naturwissenschafter, Techniker und Mediziner. *Von Dr. H. R. BECK, Karlsruhe, Dr. H. DRESEL, Freiburg/Br., und Dr. H.-J. MELCHING, Freiburg/Br. Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. H. Langendorff, Freiburg/Br. 1959. XII, 253 Seiten, 100 Abbildungen, 19 Tabellen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 36,—*

Einführung in die Meßtechnik der Kernstrahlung und die Anwendung der Radioisotope

Von Prof. Dr. H. FASSBENDER, Erlangen. 1958. XII, 223 Seiten, 142 Abbildungen und 15 Tabellen, Gr.-8°, Plastikeinband DM 37,50

Sonderausschuß Radioaktivität

Bundesrepublik Deutschland

Erster Bericht (Januar 1958). *1958. 68 Seiten, 5 Abbildungen, 10 Tabellen, Gr.-8°, kartoniert DM 4,50*

Zweiter Bericht (März 1959). *1959. 117 Seiten, 8 Abbildungen, 60 Tabellen, Gr.-8°, kartoniert DM 12,60*

Strahlenbiologie

Grundlagen und Ergebnisse. *Von Prof. Dr. H. FRITZ-NIGGLI, Zürich. 1959. XVI, 379 Seiten, 168 teils mehrfarbige Abbildungen in 301 Einzeldarstellungen, Gr.-8°, Ganzleinen DM 65,—*

Grundlagen der Strahlenbiologie

(Fundamentals of Radiobiology) *Von Prof. Dr. Z. M. BACQ, Liège, und Dr. P. ALEXANDER, London. Deutsche Übersetzung herausgegeben von Priv.-Doz. Dr. H.-J. MAURER, Bern. 1958. XII, 396 Seiten, 115 Abbildungen in 173 Einzeldarstellungen, Gr.-8°, Ganzleinen DM 49,50*

Strahlenbiologie, Strahlentherapie, Nuklearmedizin und Krebsforschung

Ergebnisse 1952—1958. *Herausgegeben von H. R. SCHINZ, Zürich, H. HOLTHUSEN, Hamburg, H. LANGENDORFF, Freiburg/Br., B. RAJEWSKY, Frankfurt/M., G. SCHUBERT, Hamburg. Bearbeitet von zahlreichen namhaften Fachgelehrten. 1959. VIII, 998 Seiten, 395 zum Teil mehrfarbige Abbildungen, 140 Tabellen, Lex.-8°, Halbleder DM 275,—*

GEORG THIEME VERLAG · STUTTGART